1997年诺贝尔经济学奖

第十一章 布莱克 -舒尔斯 -默顿期权定价模型

目录

BSM 期权定价模型的基本思路

股票价格的变化过程

BSM 期权定价公式

BSM 期权定价公式的精确度评价与拓展

基本思路

- 股票价格服从的随机过程

$$dS = \mu S dt + \boxed{\sigma S dz}$$

$$\Delta \Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S$$

- 由 ITÔ 引理可得期权价格相应服从的随机过程

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \boxed{\frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dz}$$

- BSM 微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

- BSM 期权定价公式

$$c = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

目录

标准布朗运动（维纳过程）

- 布朗运动（BROWNIAN MOTION）起源于英国植物学家布朗对水杯中的花粉粒子的运动轨迹的描述。

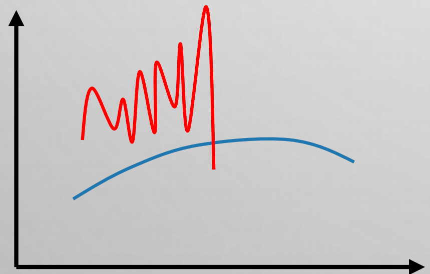
- 标准布朗运动的两大特征：
  - 特征 1： $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ （标准正态分布）
  - 特征 2： 对于任何两个不同时间间隔 ΔT， ΔZ 的值相互独立。（独立增量）

维纳过程的性质

- $$Z(T)-Z(t)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\sqrt{\Delta t}$$
- $Z(T)-Z(t)$ 也服从正态分布
  - 均值等于 0
  - 方差等于 T − t
  - 标准差等于 $\sqrt{T-t}$
  - 方差可加性(标准差不能加) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

为何使用布朗运动?

- 正态分布：经验事实证明，股票价格的连续复利收益率近似地服从正态分布
- 数学上可以证明，具备特征 1 和特征 2 的维纳过程是一个马尔可夫随机过程（未来价格仅与当前价格有关），从而与弱式 EMH 相符。
- 维纳过程在数学上对时间处处不可导和二次变分（QUADRATIC VARIATION）不为零的性质，与股票收益率在时间上存在转折尖点等性质也是相符的



一、弱式有效市场假说(Weak-Form Market Efficiency)
在弱式有效的情况下，市场价格已充分反映出所有过去历史的证券价格信息，包括股票的成交价、成交量，卖空金额、融资金额等；
推论一：如果弱式有效市场假说成立，则股票价格的技术分析失去作用，基本分析还可能帮助投资者获得超额利润.。
二、半强式有效市场假说(Semi-Strong-Form Market Efficiency)
价格已充分反映出所有已公开的有关公司营运前景的信息。这些信息有成交价、成交量、盈利资料、盈利预测值、公司管理状况及其它公开披露的财务信息等。假如投资者能迅速获得这些信息，股价应迅速作出反应。
推论二：如果半强式有效假说成立，在市场中利用基本面分析则失去作用，内幕消息可能获得超额利润。
三、强式有效市场假说(Strong-Form Market Efficiency)
价格已充分地反映了所有关于公司营运的信息，这些信息包括已公开的或内部未公开的信息。
推论三：在强式有效市场中，没有任何方法能帮助投资者获得超额利润，即使基金和有内幕消息者也一样。

实际上，有效市场假说存在严重的问题

普通布朗运动：标准布朗运动的扩展

- 遵循普通布朗运动的变量x是关于时间和dz的动态过程：

$$dx = adt + bdz$$

时间越短，dt越小，不可预测的部分dz越大

或者

$$x(t) = x_0 + at + bz(t)$$

$$dx = adt + bdz$$

a为x的漂移项　　b为x的波动项

$$\frac{dx}{x} = adt + bdz$$

ax为x的漂移项　　bx为x的波动项

对普通布朗运动的理解

$$\Delta x = \sum a' \Delta t + \sum b' \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

$$\Uparrow$$

普通布朗运动的离差形式为 $\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$ $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$

- Δx具有正态分布特征，其均值为 $a\Delta t$，标准差为 $b\sqrt{\Delta t}$ ，方差为$b^2\Delta \mathrm{t}$
- 在任意时间长度 T 后x值的变化也具有正态分布特征，其均值为 aT ，标准差为 $b\sqrt{T}$ ，方差为 b^2T 。
- 标准布朗运动为普通布朗运动的特例($a = 0$)。

$$\varepsilon \sim \varphi(0,1), E(\varepsilon) = 0, E(\varepsilon^2) - \left[E(\varepsilon)\right]^2 = 1$$

$$E(\varepsilon^2) = 1, \text{因此} E(\varepsilon^2 \Delta t) = \Delta t$$

伊藤过程（ITÔ PROCESS）

- 伊藤过程

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t a(x,t)ds + \int_0^t b(x,t)dz$$

其中，dz 是一个标准布朗运动， a,b是变量x和t的函数，变量x的漂移率为a，方差率为b^2。

标准布朗运动 $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$

$\downarrow$ 推广

普通布朗运动 $dx = a dt + b dz$

$\downarrow$ 推广

伊藤过程 $dx = a\left(x,t\right)dt + b\left(x,t\right)dz$

$\downarrow$ 特例

几何布朗运动 $dS = \mu S dt + \sigma S dz$

伊藤特例：几何布朗运动（GEOMETRIC BROWNIAN MOTION）

- 几何布朗运动 $dS = \mu S dt + \sigma S dz$

  其中 μ和 σ均为常数

- 一般用几何布朗运动来描述股票价格的随机过程

  - 可以避免股票价格为负从而与有限责任相矛盾的问题
  - 几何布朗运动意味着股票连续复利收益率服从正态分布，这与实际较为吻合

$$dlnS = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz$$

注意：因为t不连续，所以随机微分方程对时间不可导

伊藤引理（ITÔ LEMMA）

- 若变量 x遵循伊藤过程，则变量 x和 t的函数 G 将遵循如下过程：

$G = Se^{r(T-t)}$

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz$$

其中，dz 是一个标准布朗运动。

远期价格$G = Se^{r(T-t)}$遵循的随机过程?

开始证明：　二元函数泰勒展开式

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(x_k,y_k) + (x-x_k)f'_x(x_k,y_k) + (y-y_k)f'_y(x_k,y_k) \\
&+ \frac{1}{2!}(x-x_k)^2 f''_{xx}(x_k,y_k) + \frac{1}{2!}(x-x_k)(y-y_k)f''_{xy}(x_k,y_k) \\
&+ \frac{1}{2!}(x-x_k)(y-y_k)f''_{yx}(x_k,y_k) + \frac{1}{2!}(y-y_k)^2 f''_{yy}(x_k,y_k) \\
&+ o^n
\end{aligned}
$$

- $G(x,t)$的泰勒展开式为（取增量）：

$$
\begin{aligned}
\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Delta x^2 \\
+ \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t}\Delta x \Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\Delta t^2 + \ldots
\end{aligned}
$$

忽略比 ΔT 高阶的项

- 在常微分中，我们得到

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t$$

- 在随机微分中，我们得到：

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Delta x^2$$

其中，最后一项的阶数为 Δt

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

普通布朗运动

将 ΔX 代入

- 将$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$ 代入最后一项，并忽略比 Δt 高阶的项，则

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2\varepsilon^2\Delta t$$

- 由于 $\varepsilon \sim \varphi(0,1), E(\varepsilon) = 0, E(\varepsilon^2) - \left[E(\varepsilon)\right]^2 = 1$

$$E(\varepsilon^2) = 1, \text{因此} E(\varepsilon^2\Delta t) = \Delta t$$

$$E(XY) = E(X)E(Y) + COV(X,Y)$$

- 而 $\varepsilon^2\Delta t$的方差和Δt^2同阶，可以忽略，因此有

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2\Delta t$$

取极限

- 取极限 $$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2 dt$$
- 代入 $$dx = adt + bdz$$
- 可得 $$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz$$

伊藤引理的运用

- 如果我们知道 x遵循的伊藤过程，通过伊藤引理可以推导出$G(x,t)$遵循的随机过程。

- 由于衍生产品价格是标的资产价格和时间的函数，因此伊藤引理在衍生产品分析中扮演重要的角色。

案例 11.1： LnS所遵循的随机过程

$$dG=\left(\frac{\partial G}{\partial x}a+\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt+\frac{\partial G}{\partial x}bdz$$

- 假设变量 S 服从几何布朗运动 $dS=\underbrace{\boxed{\mu S}}_{a}dt+\underbrace{\boxed{\sigma S}}_{b}dz$
- 令 $G=\ln S$，则

$$\frac{\partial G}{\partial S}=\frac{1}{S},\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}=-\frac{1}{S^2},\frac{\partial G}{\partial t}=0$$

- 运用伊藤引理可得$G=\ln S$ 所遵循的随机过程为

$$dG=d\ln S=\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\sigma dz$$

说明连续复利收益率$d\ln S$ 服从期望值$\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt$ 方差为$\sigma^2 dt$ 的正态分布。

- 特别注意：在随机微分方程中 $d\ln S\neq\frac{dS}{S}$

特别注意：随机微分方程对时间不可导

练习：$F=Se^{r(T-t)}$

案例 11.2： 远期价格F 所遵循的随机过程

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz$$

- 假设变量 S 服从几何布朗运动 $dS = \underbrace{\boxed{\mu S}}_{a} dt + \underbrace{\boxed{\sigma S}}_{b} dz$
- 由于 $F = Se^{r(T-t)}$ ，则

$$\frac{\partial F}{\partial S} = e^{r(T-t)}, \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0, \frac{\partial F}{\partial t} = -rF$$

- 运用伊藤引理可得

$$dF = (\mu - r)Fdt + \sigma Fdz$$

说明期货价格的漂移率比标的资产小r（也验证了“远期和预期无关”）。

根据伊藤引理，其远期合约（$f=S-Xe^{-r(T-t)}$）的价值在风险中性世界中遵循(练习)

$$\frac{df}{f}=rdt+\left(\frac{\delta S}{f}\right)dz$$

$$dG=\left(\frac{\partial G}{\partial x}a+\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt+\frac{\partial G}{\partial x}bdz$$

假设x_t是在T时刻支付1美元的零息票债券按连续复利计息的到期收益率。x_t遵循如下过程：

$$dx_t=a(x_0-x_t)dt+sx_tdz_t$$

其中，x_t，a，s，是正常数，dz_t是维纳过程。写出债券价格遵循的过程。

t 时刻的零息债的表达式为：$B_t=e^{-x(T-t)}$则由伊藤引理可得：

$$\mathrm{d}B_t=\frac{\partial B_t}{\partial x}dx+\frac{\partial B_t}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 B_t}{\partial x^2}(dx)^2$$

将$\mathrm{dx}=\mathrm{a}(x_0-\mathrm{x})\mathrm{dt}+\mathrm{sxdz}$ 代入上式，得到

$$=-(\mathrm{T}-\mathrm{t})B_tdx+xB_tdt+\frac{1}{2}(T-t)^2B_ts^2x^2dt$$

$$=\left(-\ \mathrm{a}(x_0-\mathrm{x})(\mathrm{T}-\mathrm{t})+x+\frac{1}{2}(T-t)^2s^2x^2\right)B_tdt-sx(T-t)B_tdz$$

股票价格的变化过程：几何布朗运动 I

- 股票价格服从几何布朗运动

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

思考：短期股价好预测还是长期股价好预测?

意味着
$$dG = d\ln S = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz$$

注意：和常微分方程不同

- 几何布朗运动具有如下性质：

连续复利收益率

股票价格的变化过程：几何布朗运动 III

- 股票价格的对数服从普通布朗运动，特定时刻的股票价格服从对数正态分布。

两边乘以$T-t$

$$\ln S_T - \ln S \sim \varphi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right]$$

$$\ln S_T \sim \varphi\left[\ln S_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right]$$

$$F = Se^{r(T-t)}$$

$$E(S_T) = Se^{\mu(T-t)}$$

$$Var(S_T) = S^2 e^{2\mu(T-t)}\left[e^{\sigma^2(T-t)} - 1\right]$$

要求每个人必须会推导

推导过程

令 $Y=\ln X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $X=e^Y$，于是

$$EX^k=Ee^{kY}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{kY}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(Y-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{kY}\cdot e^{-\frac{\left(Y-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{2\sigma^2kY-\left(Y-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{Y^2-2\left(\mu+k\sigma^2\right)Y+\mu^2}{2\sigma^2}}dy$$

$$=e^{k\mu+\frac{k^2\sigma^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\left(Y-\mu-k\sigma^2\right)^2}{2\sigma^2}}dy=e^{k\mu+\frac{k^2\sigma^2}{2}}$$

$$E(S_T)=E\left(e^{lnS_T}\right)=e^{E(lnS_T)+\frac{1}{2}var(lnS_T)}=e^{lnS_t+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}=Se^{\mu(T-t)}$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=e^{2\mu+2\sigma^2}-e^{2\mu+\sigma^2}$$

股票价格的变化过程：几何布朗运动 II

- S 不会为负，这与有限责任下股票价格不可能为负是一致的。
- 股票连续复利收益率服从正态分布。
  - $T-t$期间年化的连续复利收益率可以表示为

$$\eta = \frac{\ln S_T - \ln S}{T-t}$$

  - 可知随机变量 η（连续复利收益率）服从正态分布

$$\eta \sim \varphi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right), \frac{\sigma}{\sqrt{T-t}}\right]$$

  - σ是股票连续复利收益率的年化标准差，也被称为股票价格对数的波动率（VOLATILITY）

案例 11.3：几何布朗运动下股票价格的概率分布 I

- 设 A 股票的当前价格为 50 元，预期收益率为每年18%，波动率为每年 20%，假设该股票价格遵循几何布朗运动且该股票在 6 个月内不付红利。
- 请问该股票 6 个月后的价格 S_T 的概率分布如何？A 股票在 6 个月后股票价格的期望值和标准差分别是多少?

案例 11.3：几何布朗运动下股票价格的概率分布 II

- 由题意知： S = 50, μ= 0.18, σ= 0.2, $T-t$= 0.5 年
- 因此 6 个月后S_T的概率分布为

$$\ln S_T \sim \Phi\left[\ln 50+\left(0.18-\frac{0.04}{2}\right)\times 0.5, 0.2\times\sqrt{0.5}\right]$$

- 即 $\ln S_T \sim \Phi\left(3.992, 0.141\right)$

案例 11.3： 几何布朗运动下股票价格的概率分布 III

- 由于一个正态分布变量取值位于均值左右两个标准差范围内的概率为 95% ，因此，置信度为 95% 时，

$$3.71 < \ln S_T < 4.274$$

$$40.85 < S_T < 71.81$$

- 因此， 6 个月 A 股票价格落在 40.85 元到 71.81 元之间的概率为 95% 。

案例 11.3： 几何布朗运动下股票价格的概率分布 IV

- 半年后，A 股票价格的期望值为 54.71 元，标准差为$\sqrt{60.46}$或 7.78 。

$$E\left(S_T\right) = 50e^{0.18\times0.5} = 54.71$$
$$Var\left(S_T\right) = 2500e^{2\times0.18\times0.5} \times \left(e^{0.04\times0.5} - 1\right) = 60.46$$

百分比收益率与对数收益率

- 短时间内

$$\frac{\delta S}{S} = \mu\delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\delta t}$$

- 几何布朗运动只意味着短时间内的股票价格百分比收益率服从正态分布，长期间内股价百分比收益率正态分布的性质不再存在，但连续复利收益率始终服从正态分布。

预期收益率 μ

- μ 为 ΔT 时间内股票的年化百分比期望收益率，股票的连续复利收益率$\mu-\frac{\sigma^2}{2}$。
- 根据资本资产定价原理，μ取决于该证券的系统性风险、无风险利率水平、以及市场的风险收益偏好。由于后者涉及主观因素，因此其决定本身就较复杂。然而幸运的是，在无套利条件下，衍生证券的定价与标的资产的预期收益率是（有关还是无关？）的。

波动率 σ

- 证券价格对数的年波动率，是股票价格对数收益率的年化标准差
- 人们常常从历史的证券价格数据中计算出样本对数收益率的标准差，再对时间标准化，得到年标准差，即为波动率的估计值。
- 在计算中，一般情况下时间距离计算时越近越好；但时间窗口也不宜太短；一般采用交易天数计算波动率而不采用日历天数。

样本间隔对收益率与波动率估计的影响

样本间隔对估计结果的影响

样本间隔	连续复利年收益率均值	比例年收益率均值	波动率	年化收益率的标准差
日	17.43%	25.7002%	40.67%	636.62%
月	16.14%	28.3418%	49.40%	171.11%
季度	16.02%	26.9291%	46.71%	93.44%
年度	15.66%	27.6454%	48.96%	48.96%

注：1样本为 1990 年 12 月 19 日—2010 年 4 月 27 日上证指数；

2. 表中的比例年收益率均值计算公式等于连续复利收益率均值$+\frac{\sigma^2}{2}$；

3. 从表中可以看出，年化收益率的标准差没有直接经济含义。

目录

衍生品价格所服从的随机过程

- 当股票价格服从几何布朗运动

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

- 根据伊藤引理，衍生证券的价格 G 应遵循如下过程：

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dz$$

- 衍生证券价格 G 和股票价格 S 都受同一个不确定性来源dz的影响

假设

- 证券价格遵循几何布朗运动，即 μ和 σ为常数
- 允许卖空标的证券
- 没有交易成本
- 没有交易费用和税收，所有证券都完全可分
- 衍生证券有效期内标的证券没有现金收益支付
- 不存在无风险套利机会
- 证券交易是连续的，价格变动也是连续的
- 衍生证券有效期内，无风险利率 r为常数

思考：金融工程发展需要最先突破那个假设？

BSM 微分分程的推导 I

- 由于假设股票价格 S 遵循几何布朗运动，因此

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

在一个小的时间间隔 Δt中， S 的变化值 ΔS 为

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z$$

BSM 微分分程的推导 II

- 设f是依赖于 S 的衍生证券的价格，则 f 一定是 S 和T 的函数，根据伊藤引理可得：

$$df=\left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S+\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt+\frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dz$$

在一个小的时间间隔Δt中， f的变化值Δf满足：

$$\Delta f=\left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S+\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t+\frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\Delta z$$

BSM 微分分程的推导 III

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \boxed{\sigma S \Delta z}$$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right)\Delta t + \boxed{\frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta z}$$

- 为了消除风险源 Δz ，可以构建一个包括一单位衍生证券空头和$\frac{\partial f}{\partial S}$单位标的证券多头的组合。
- 令 Π 代表该投资组合的价值，则：

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S$$

在Δt时间后，该投资组合的价值变化 ΔΠ 为

$$\Delta \Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S$$

BSM 微分分程的推导 IV

- 代入Δf和 ΔS 可得

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t$$

- 由于消除了风险，组合 Π 必须获得无风险收益，即

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t$$

BSM 微分分程的推导 V

目的：建立f与r的关系

- 因此

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(f-\frac{\partial f}{\partial S}S\right)\Delta t$$

化简可得：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+rS\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=rf$$ 与μ无关

- 这就是著名的 BSM 微分分程，它适用于其价格取决于标的证券价格 S 的所有衍生证券的定价。

风险中性定价原理 I

- 观察 BSM 微分方程可以发现，受制于主观的风险收益偏好的标的证券预期收益率并未包括在衍生证券的价值决定公式中。这意味着，无论风险收益偏好状态如何，都不会对f的值产生影响。

- 因此可以作出一个可以大大简化我们工作的假设：在对衍生证券定价时，所有投资者都是风险中性的。

为了计算方便

思考：风险中性与无风险的区别？（风险量、风险价格 ）

风险中性定价原理 II

- 在所有投资者都是风险中性的条件下（有时我们称之为进入了一个“风险中性世界”）：
  - 所有可交易资产的百分比预期收益率都等于无风险利率r，因为风险中性的投资者并不需要额外的收益来吸引他们承担风险。
  - 同样，在风险中性条件下，所有现金流在求现值都应该使用无风险利率进行贴现。
- 这就是风险中性定价原理。

风险中性世界中可交易资产的随机过程

- 如果某种可交易资产的价格在现实世界中的随机过程为:

$$\frac{dx}{x} = \mu dt + \delta dz \qquad \frac{dx}{x} = (r + \sigma\lambda)dt + \delta dz$$

- 则在风险中性世界中其遵循:

$$\frac{dx}{x} = rdt + \delta dz$$

理解风险中性定价 I

- 假设一种不支付红利股票目前的市价为 10 元，我们知道在 3 个月后，该股票价格要么是 11 元，要么是 9 元。现在我们要找出一份 3 个月期协议价格为 10.5 元的该股票欧式看涨期权的价值。
- 由于欧式期权不会提前执行，其价值取决于 3 个月后股票的市价。若 3 个月后该股票价格等于 11 元，则该期权价值为 0.5 元；若 3 个月后该股票价格等于 9 元，则该期权价值为 0 。

思考：风险源有几个?

学会对冲！！！

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \boxed{\sigma S \Delta z}$$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \boxed{\frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta z}$$

理解风险中性定价 II

- 为了找出该期权的价值，我们可构建一个由 1 单位看涨期权空头和 Δ 单位的标的股票多头组成的组合。
- 若 3 个月后股票价格等于 11 元，该组合价值等于(11Δ – 0.5) 元；若 3 个月后该股票价格等于 9 元，该组合价值等于 9Δ 元。
- 由于

$$11\Delta - 0.5 = 9\Delta \Rightarrow \Delta = 0.25$$

- 因此，一个无风险组合应包括 1 份看涨期权空头和0.25 股标的股票。无论 3 个月后股票价格等于 11 元还是 9 元，该组合价值都将等于 2.25 元。

理解风险中性定价 III

- 假设现在的无风险年利率为 10%，则该组合现值为

$$2.25e^{-0.1\times0.25}=2.19$$

- 因此

$$10\times0.25-f\ =\ 2.19\ \Rightarrow\ f\ =\ 0.31\text{元}$$

- 这就是说，该看涨期权的价值应为 0.31 元，否则就会存在无风险套利机会。

理解风险中性定价 IV

- 可以看出，在确定期权价值时，我们并不需要知道股票价格在真实世界中上涨到 11 元的概率和下降到 9 元的概率。也就是说，我们并不需要了解真实世界中股票未来价格的期望值，而期望值的确定正与投资者的主观风险偏好相联系。（每个人牢牢钉在脑子里）
- 因此我们可以在假设风险中性的前提下为期权定价。

理解风险中性定价 V

- 投资者厌恶风险程度、股票的预期收益率和股票升跌概率之间的联系：
  - 在风险中性世界中，无风险利率为 10%，则股票上升的概率 P 为：

$$10 = e^{-0.1\times0.25}\times\left[11P+9\left(1-P\right)\right]\Rightarrow P=62.66\%$$

那么，期权的价格怎么算?

$$f=e^{-0.1\times0.25}\times\left[0.5\times0.6266+\left(1-0.6266\right)\times0\right]\Rightarrow f=0.31$$

无收益资产欧式看涨期权的定价公式 I

- 在风险中性世界中，无收益资产欧式看涨期权到期时(T时刻)的期望值为:

$$\hat{E}\left[\max\left(S_T - X, 0\right)\right]$$

其中，$\hat{E}$表示风险中性条件下的期望值。

- 相应地欧式看涨期权的价格c等于

$$c = e^{-r\left(T-t\right)}\hat{E}\left[\max\left(S_T - X, 0\right)\right]$$

$$= e^{-r\left(T-t\right)}\int_X^{+\infty}\left(S_T - X\right)g\left(S_T\right)dS_T$$

对数正态分布

无收益资产欧式看涨期权的定价公式 II

- 由于在风险中性世界中

$$\ln S_T \sim \varphi\left[\ln S + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right]$$

BSM 期权定价公式的推导 I

- 由于 $$c = e^{-r(T-t)}\hat{E}\left[\max\left(S_T - X, 0\right)\right]$$

  和 $$\ln S_T \sim \varphi\left[\ln S + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right]$$

- 令

$$m = \hat{E}\left(\ln S_T\right) = \ln S + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$$

$$s = \sqrt{Var\left(\ln S_T\right)} = \sigma\sqrt{T-t}$$

$$W = \frac{\ln S_T - m}{s}$$

BSM 期权定价公式的推导 II

- 其中

$$m = \hat{E}\left(\ln S_T\right) = \ln S + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(T - t\right)$$
$$s = \sqrt{Var\left(\ln S_T\right)} = \sigma\sqrt{T - t}$$

- 显然

$$W \sim N\left(0,1\right)$$

- 即随机变量 W 的密度函数 H(W) 为

$$h\left(W\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{W^2}{2}}$$

$$\hat{E}\left[\max\left(S_T - X, 0\right)\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \max\left(S_T - X\right) f\left(S_T\right) dS_T$$

$$= \int_{X}^{\infty} S_T f\left(S_T\right) dS_T - \int_{X}^{\infty} X f\left(S_T\right) dS_T$$

$$= \int_{\ln X}^{\infty} e^{\ln S_T} g\left(\ln S_T\right) d\left(\ln S_T\right) - \int_{\ln X}^{\infty} X g\left(\ln S_T\right) d\left(\ln S_T\right)$$

$$u = \ln S_T$$

$$= \int_{\frac{\ln X - m}{s}}^{\infty} e^{sW+m} h\left(W\right) dW - \int_{\frac{\ln X - m}{s}}^{\infty} X h\left(W\right) dW$$

$$W = \frac{\ln S_T - m}{s} \qquad h\left(W\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{W^2}{2}}$$

$$= \int_{\frac{\ln X - m}{s}}^{\infty} e^{sW+m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{W^2}{2}} dW - \int_{\frac{\ln X - m}{s}}^{\infty} X h\left(W\right) d\left(W\right)$$

$$m = \hat{E}\left(\ln S_T\right) = \ln S + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(T - t\right)$$

$$s = \sqrt{Var\left(\ln S_T\right)} = \sigma\sqrt{T - t}$$

$$= \int_{\frac{\ln X - m}{s}}^{\infty} e^{\frac{s^2}{2}+m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(W-s\right)^2}{2}} dW - XN\left(\frac{m - \ln X}{s}\right)$$

$$= \int_{\frac{\ln X - m}{s}-s}^{\infty} e^{\frac{s^2}{2}+m} h\left(W\right) dW - XN\left(\frac{\ln\frac{S}{X} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(T - t\right)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right)$$

BSM 期权定价公式的推导

$$\hat{E}\left[\max\left(S_T - X, 0\right)\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \max\left(S_T - X\right) f\left(S_T\right) dS_T \qquad 0$$

$$= \int_X^{\infty} S_T f\left(S_T\right) dS_T - \int_X^{\infty} X f\left(S_T\right) dS_T \qquad 1$$

$$= \int_{\ln X}^{\infty} e^{\ln S_T} g\left(\ln S_T\right) d\left(\ln S_T\right) - \int_{\ln X}^{\infty} X g\left(\ln S_T\right) d\left(\ln S_T\right)$$ 2.转换为对数

$$= \int_{\frac{\ln X - m}{s}}^{\infty} e^{sW+m} h\left(W\right) dW - \int_{\frac{\ln X - m}{s}}^{\infty} X h\left(W\right) dW$$ 3.变量替换 $W = \frac{\ln S_T - m}{s}$ $\quad h\left(W\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{W^2}{2}}$

$$= \int_{\frac{\ln X - m}{s}}^{\infty} e^{sW+m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{W^2}{2}} dW - \int_{\frac{\ln X - m}{s}}^{\infty} X h\left(W\right) d\left(W\right) \qquad 4$$

$$= \int_{\frac{\ln X - m}{s}}^{\infty} e^{\frac{s^2}{2}+m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(W-s\right)^2}{2}} dW - XN\left(\frac{m - \ln X}{s}\right) \qquad 5$$

$$m = \hat{E}\left(\ln S_T\right) = \ln S + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(T - t\right)$$

$$s = \sqrt{Var\left(\ln S_T\right)} = \sigma\sqrt{T - t} \qquad 1 - N\left(x\right) = N\left(-x\right)$$

$$= \int_{\frac{\ln X - m}{s} - s}^{\infty} e^{\frac{s^2}{2}+m} h\left(W\right) dW - XN\left(\frac{\ln\frac{S}{X} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(T - t\right)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right)$$

6 $\quad e^{\frac{s^2}{2}+m} = e^{\ln S + r\left(T-t\right)} = Se^{r\left(T-t\right)}$

$$= \hat{E}\left(S_T\right) N\left(\frac{\ln\frac{S}{X} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(T - t\right)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right) - XN\left(\frac{\ln\frac{S}{X} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(T - t\right)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right)$$

无收益资产欧式看涨期权的定价公式 III

- 积分可得

S>X的概率

$$c = SN\left(d_1\right) - Xe^{-r\left(T-t\right)}N\left(d_2\right)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln\left(S/X\right) + \left(r + \sigma^2/2\right)\left(T-t\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(S/X\right) + \left(r - \sigma^2/2\right)\left(T-t\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

无收益资产欧式看涨期权定价公式理解 I

- 我们可以用股票和负债复制期权。
  - 可以证明，$N(d_1) = \frac{\partial f}{\partial S}$比较复杂，直接求导

    它是构造无风险组合Π时的Δ，是复制投资组合中股票$SN(d_1)$的数量，就是股票的市值
  - 而$Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$则是复制交易策略中负债的价值。
- 由于主要参数都是时变的，因此这种复制策略是动态复制策略，必须不断调整相关头寸数量。

无收益资产欧式看涨期权定价公式理解 II

- 从金融工程的角度来看，欧式看涨期权可以分拆成或有资产看涨期权（ASSET-OR-NOTHING CALL OPTION）多头和 X 份或有现金看涨期权（CASH-OR-NOTHING CALL OPTION）空头之和。

$$c = SN\left(d_1\right) - Xe^{-r\left(T-t\right)}N\left(d_2\right)$$

赌博：如果价格超过一定数量，你给我资产，我给你现金

无收益资产欧式看涨期权定价公式理解 III

理解N(d1)与N(d2)的区别

- $N(d_2)$是在风险中性世界中S_T大于 X 的概率，即欧式看涨期权被执行的概率，因此$Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$可以看成预期执行期权所需支付的现值。

以资产为记账单位

- 而$N(d_1)$则是在以股票作为记账单位的风险中性世界里S_T大于X的概率。$SN(d_1)$可以看成期权持有者预期执行期权所得资产的现值。

无收益资产欧式看涨期权定价公式理解 IV

- $N(d_2)$是在风险中性世界中S_T大于X的概率，即欧式看涨期权被执行的概率，因此$Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$可以看成预期执行期权所需支付的现值。
- 而

$$e^{r(T-t)}SN(d_1)=\hat{E}(S_T)N(d_1)$$

则是在风险中性世界里，一个如果$S_T > X$就等于S_T否则就等于 0 的一个变量的期望值，$SN(d_1)$则是这个值的贴现值，可以看成期权持有者预期执行期权所得收入的现值。

- 因此整个看涨期权定价公式就是在风险中性世界里期权未来期望回报的现值。

欧式平价期权的定价公式

$S = Xe^{-r(T-t)}$

- 欧式平价看涨期权（一般鼓励买平价期权）

$$c = SN\left(d_1\right) - Xe^{-r\left(T-t\right)}N\left(d_2\right)$$

$$\frac{c}{S} = N\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) - N\left(-\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right)$$

$$= 2N\left(\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) - 1$$

$N(-x) = 1 - N(x)$

$\sqrt{T}$规则

期限(年) 波动率	0.1	0.2	0.4	0.5	0.9	1	2	4	9	16
1%	0.0013	0.0018	0.0025	0.0028	0.0038	0.0040	0.0056	0.0080	0.0120	0.0160
2%	0.0025	0.0036	0.0050	0.0056	0.0076	0.0080	0.0113	0.0160	0.0239	0.0319
5%	0.0063	0.0089	0.0126	0.0141	0.0189	0.0199	0.0282	0.0399	0.0598	0.0797
10%	0.0126	0.0178	0.0252	0.0282	0.0378	0.0399	0.0564	0.0797	0.1192	0.1585
20%	0.0252	0.0357	0.0504	0.0564	0.0756	0.0797	0.1125	0.1585	0.2358	0.3108
30%	0.0378	0.0535	0.0756	0.0845	0.1132	0.1192	0.1680	0.2358	0.3473	0.4515
50%	0.0630	0.0890	0.1256	0.1403	0.1875	0.1974	0.2763	0.3829	0.5467	0.6827
70%	0.0881	0.1244	0.1752	0.1955	0.2601	0.2737	0.3794	0.5161	0.7063	0.8385
80%	0.1007	0.1420	0.1997	0.2227	0.2957	0.3108	0.4284	0.5763	0.7699	0.8904
100%	0.1256	0.1769	0.2482	0.2763	0.3647	0.3829	0.5205	0.6827	0.8664	0.9545

无收益资产欧式看跌期权的定价公式

- 根据 PCP 平价关系可得

$$p = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

- 对于平价期权，C=P

$N(-x) = 1 - N(x)$

无收益资产**美式**看涨期权的定价公式

- 在标的资产无收益情况下， C = c ，因此无收益资产美式看涨期权的定价公式同样是：

$$C = SN\left(d_1\right) - Xe^{-r\left(T-t\right)}N\left(d_2\right)$$

有收益资产的欧式期权的定价公式 I

- 在收益已知的情况下，我们可以把标的证券的价格分解成两部分：期权有效期内已知收益的现值部分和一个有风险部分。在期权到期之前，收益现值部分将由于标的资产支付收益而消失。
- 因此，只要从标的证券当前的价格 S 中消去收益现值部分，将剩下有风险部分的证券价格作为真正影响期权价值的标的资产价格，用σ表示证券价格中风险部分的波动率，就可直接套用公式分别计算出有收益资产的欧式看涨期权和看跌期权的价值。

有收益资产的欧式期权的定价公式 II

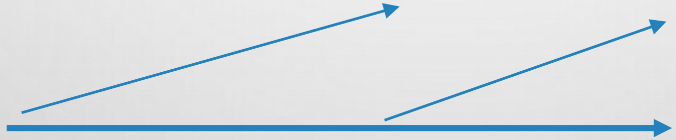
- 当标的证券已知收益的现值为 I 时，用 (S – I) 代替 S
- 当标的证券的收益为按连续复利计算的固定收益率 Q（单位为年）时，用 $S\mathrm{e}^{-\mathrm{q}(T-t)}$ 代替 S

有收益资产的欧式期权的定价公式 III

- 一般来说，期货期权、股指期权和外汇期权都可以看作标的资产支付连续复利收益率的期权。
  - 欧式期货期权可以看作一个支付连续红利率为 r 的资产的欧式期权
  - 股指期权则是以市场平均股利支付率为收益率
  - 外汇期权标的资产的连续红利率为该外汇在所在国的无风险利率

有收益资产的美式看涨期权的定价

- 先确定提前执行美式看涨期权是否合理
  - 若不合理，则按欧式期权方法定价
  - 若在t_n提前执行可能是合理的，则要分别计算在 T 时刻和t_n时刻到期的欧式看涨期权的价格，然后将二者之中的较大者作为美式期权的价格。在大多数情况下，这种近似效果都不错。



美式看跌期权的定价

- 美式看跌期权无论标的资产有无收益都有提前执行的可能，而且与其对应的看涨期权也不存在精确的平价关系，因此一般通过数值方法来求美式看跌期权的价值。

BSM 期权定价公式的参数估计

- BSM 期权定价公式中的期权价格取决于下列五个参数：标的资产市场价格、执行价格、到期期限、无风险利率和标的资产价格波动率
- 在这些参数当中，前三个都是很容易获得的确定数值。但是无风险利率和标的资产价格波动率则需要进行估计。
- 到期期限、无风险利率和波动率的时间单位必须相同（通常为年）。

估计无风险利率

- 使用连续复利的即期利率
- 美国：国债利率；中国：银行存款利率/国债市场即期利率
- 选择距离期权到期日最近的利率

估计标的资产价格的波动率 I

- 历史波动率
  - 样本对数收益率标准差
  - 广义自回归条件异方差模型（GENERALIZED AUTOREGRESSIVE CONDITIONAL HETEROSKEDASTICITY，GARCH）和随机波动率模型
- 隐含波动率

目录

BSM 期权定价公式的精确度评价

- BSM 期权定价公式在定价方面存在一定偏差，但它依然是迄今为止解释期权价格动态的最佳模型之一，应用广泛，影响深远。
- BSM 期权定价与市场价格存在差异的主要原因：
  - 期权市场价格偏离均衡；
  - 使用错误的参数；
  - BSM 期权定价公式建立在众多假定的基础上。

BSM 期权定价公式的缺陷与拓展

- 无交易成本假设的放松
- 常数波动率假设的放松
- 参数假设的放松
- 资产价格连续变动假设的放松