

第五章 非线性趋势外推预测法

■ 讲授内容：

第一节 多项式曲线预测

第二节 对数曲线趋势预测

第三节 指数曲线和修正指数曲线趋势预测

第四节 S形曲线预测模型

第五节 非线性趋势预测案例

■ 思考与练习



第五章 非线性趋势外推预测法

- 对于许多经济和技术问题，预测对象的变化随时间大致呈现出某种曲线形态，如多项式曲线、对数曲线、指数曲线等。
- 本章将介绍几种常见的非线性趋势外推预测模型，及其参数估计和适用条件。
- 非线性趋势外推预测是指根据时间序列的长期趋势，以时间 t 为自变量，时间序列 Y_t 为因变量，拟合非线性趋势模型 $\hat{Y}_t = f(t)$ ，然后以顺延的时间单位作为已知条件，据以进行外推预测。

第一节 多项式曲线预测



- 多项式曲线模型的基本形态为：

$$Y_t = a_0 + a_1t + \cdots + a_pt^p + u_t \quad (5.1)$$

其中，经济变量 Y_t 为模型的因变量，时间 t 为模型的自变量， a_i ($i=0, 1, \dots, p$) 为待估参数， p 表示多项式的次数， u_t 为误差项。

- 参数的个数越多，多项式的次数越高，模型就越复杂。



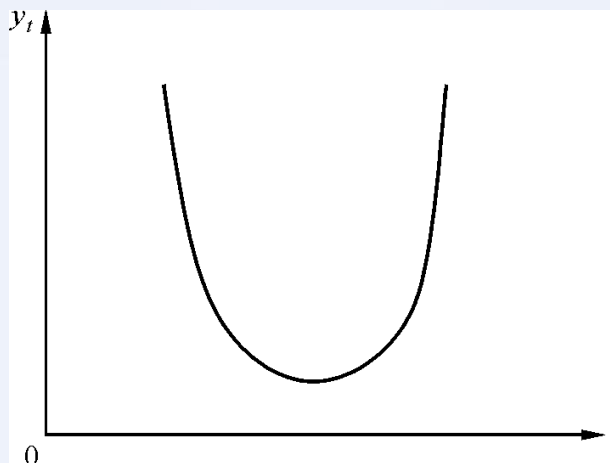
一、二次多项式曲线预测

- 二次多项式曲线模型的形式为：

$$Y_t = a_0 + a_1t + a_2t^2 + u_t \quad (5.2)$$

- 其图像是二次抛物线，在某一时点出现趋势转折点，曲线增长方向出现改变。例如，当 $a_2 > 0$ 时，如图5-1所示：

图5-1二次多项式曲线



一、二次多项式曲线预测

■ 1. 估计二次曲线参数

- **三点法的基本思路**是：从经济对象样本序列 $\{Y_t\}$ 的首尾两端和正中间分别取一定量的项，然后对这些项及其对应的时间序列 $\{t\}$ 进行算术平均或加权平均，**得到三组简单算术平均数值或加权平均数值** $(\bar{t}_1, \bar{Y}_1), (\bar{t}_2, \bar{Y}_2), (\bar{t}_3, \bar{Y}_3)$ 。将求得的三组数据代入式（5.2），可得三个方程，联立方程求解，可得三个参数 a_0 , a_1 和 a_2 的估计值。



一、二次多项式曲线预测

- 三点法的具体计算步骤如下：

设 n 为时间序列的总项数（ n 取奇数），分别在初期、中期、末期取 k 项序列。一般 k 与 n 要相符， n 越大各期所取的项也越多。一般情况下，当 $n \geq 15$ ，取 $k=5$ ；当 $9 \leq n \leq 15$ ，取 $k=3$ 。下面的介绍以 $k=5$ 为例，即作五项加权平均，权重取 $\omega_i = i$ （ $i=1, 2, \dots, 5$ ）。

$\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{Y}_3$ 为各期的加权平均值， d 为正中项， $d = \frac{n+1}{2}$ ，则有：



一、二次多项式曲线预测

$$\bar{Y}_1 = \frac{\sum \omega_i Y_i}{\sum \omega_i} = \frac{Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3 + 4Y_4 + 5Y_5}{1+2+3+4+5}$$

$$\bar{Y}_2 = \frac{Y_{d-2} + 2Y_{d-1} + 3Y_d + 4Y_{d+1} + 5Y_{d+2}}{1+2+3+4+5}$$

$$\bar{Y}_3 = \frac{Y_{n-4} + 2Y_{n-3} + 3Y_{n-2} + 4Y_{n-1} + 5Y_n}{1+2+3+4+5}$$

对应的时间序列{Y_t}也以相同的权数求**加权平均值**:

$$\bar{t}_1 = \frac{11}{3}$$

$$\bar{t}_2 = \frac{3n+7}{6}$$

$$\bar{t}_3 = n - \frac{4}{3}$$



一、二次多项式曲线预测

将这三个点代入二次模型中，可得：

$$\bar{Y}_1 = a_0 + a_1 \frac{11}{3} + a_2 \left(\frac{11}{3}\right)^2$$

$$\bar{Y}_2 = a_0 + a_1 \left(\frac{3n+7}{6}\right) + a_2 \left(\frac{3n+7}{6}\right)^2$$

$$\bar{Y}_3 = a_0 + a_1 \left(n - \frac{4}{3}\right) + a_2 \left(n - \frac{4}{3}\right)^2$$



一、二次多项式曲线预测

可解得**参数估计值**：

$$\hat{a}_2 = \frac{2(\bar{Y}_1 + \bar{Y}_3 - 2\bar{Y}_2)}{(n-5)^2}$$

$$\hat{a}_1 = \frac{\bar{Y}_3 - \bar{Y}_1}{n-5} - \frac{3n+7}{3} \hat{a}_2$$

$$\hat{a}_0 = \bar{Y}_1 - \frac{11}{3} \hat{a}_1 - \frac{121}{9} \hat{a}_2$$

自行演算三项加权平均的参数估计值



一、二次多项式曲线预测

■ 2. 二次多项式曲线趋势预测的**适用条件**

- **一种方法是简单的直观法**，它是将预测对象的时间序列数据绘制成散点图并对其进行观察，若呈现先升后降或先降后升的发展趋势，即可采用二次多项式曲线预测法。简单直观是该方法的优点，但是由于制图比例、观察者的目测等因素影响，该方法又显得较为粗糙和不精确。



一、二次多项式曲线预测

- 另一种方法是数据分析法。

设时间序列 Y_t 的图形为二次多项式曲线，记 ΔY_t 为 Y_t 的一阶差分，即：

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = a_1 - a_2 + 2a_2t$$

可见，经过一阶差分后的序列仍受时间趋势 t 的影响，有一个上升的趋势。

- 记 $\Delta^2 Y_t$ 为 Y_t 的二阶差分，则有：

$$\Delta^2 Y_t = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1} = 2a_2$$

经过二阶差分后的序列变为一常数，这就是二次多项式曲线模型的一个特点。



一、二次多项式曲线预测

对于时间序列数据，逐期求二阶差分，若各期的二阶差分接近于一个常数或二阶差分比较平稳，则时间序列的发展趋势近似于二次多项式曲线趋势，可配合二次多项式曲线模型进行预测。



一、二次多项式曲线预测

【例5-1】某啤酒厂过去9年的啤酒产量如表5-1所示，试预测今年的啤酒产量。

表 5-1 某啤酒厂的啤酒产量资料

单位：吨

年份编号 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
产量 y_t	54	80	122	168	230	312	408	515	632
Δy_t	—	26	42	46	62	82	96	107	117
$\Delta^2 y_t$	—	—	16	4	16	20	14	11	10



一、二次多项式曲线预测

【例5-1】某啤酒厂过去9年的啤酒产量如表5-1所示，试预测今年的啤酒产量。

$$\overline{Y_1} = \frac{54 + 2 \times 80 + 3 \times 122}{1 + 2 + 3} \approx 96.67$$

$$\overline{Y_2} = \frac{168 + 2 \times 230 + 3 \times 312}{1 + 2 + 3} \approx 260.67$$

$$\overline{Y_3} = \frac{408 + 2 \times 515 + 3 \times 632}{1 + 2 + 3} \approx 555.67$$

代入参数估计式可得

$$\hat{a}_2 = \frac{2(\overline{Y_1} + \overline{Y_3} - 2\overline{Y_2})}{(n-3)^2} = \frac{2 \times (96.67 + 555.67 - 2 \times 260.67)}{36} \approx 7.28$$

$$\hat{a}_1 = \frac{\overline{Y_3} - \overline{Y_1}}{n-3} - \frac{3n+5}{3} \hat{a}_2 = \frac{555.67 - 96.67}{6} - \frac{32}{3} \times 7.28 \approx -1.15$$

$$\hat{a}_0 = \overline{Y_1} - \frac{7}{3} \hat{a}_1 - \frac{49}{9} \hat{a}_2 = 96.67 - \frac{7}{3} \times (-1.15) - \frac{49}{9} \times 7.28 \approx 59.72$$



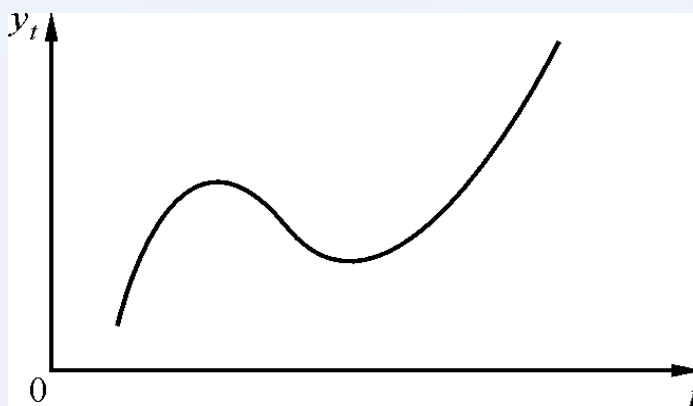
二、三次多项式曲线预测

■ 三次多项式曲线模型为：

$$Y_t = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + u_t \quad (5.3)$$

- 其图像会出现两次方向转变，在两次转折点上，预测对象的发展方向会出现变化。如图5-2所示。

图5-2三次多项式曲线



二、三次多项式曲线预测

■ 1. 参数估计

- 由于该模型有四个未知参数 a_0, a_1, a_2, a_3 ，用之前的三点法所得的方程个数不足以求解所有未知参数，所以这里需要确定四个典型点。



即采用四点法
对模型参数进
行估计



二、三次多项式曲线预测

■ 1. 参数估计

- 将时间序列 Y_t ，按先后顺序分成间隔相等的四段，分别称为首段、中间偏左段、中间偏右段、末段，然后从各段分别取一定量的项构成样本，并分别计算各段所取项的平均数。
- 当时间序列的总项数大于20时，每段取五项，则对每段中的五项按先后顺序分别以1, 2, 3, 4, 5为权数计算加权平均数。



二、三次多项式曲线预测

■ 1. 参数估计

- 分别将各段的中点序号记为 d_1, d_2, d_3, d_4

$$d_2 - d_1 = d_3 - d_2 = d_4 - d_3 = \frac{n-5}{3}$$

$$\text{从而有: } d_1 = 3, d_2 = \frac{n+4}{3}, d_3 = \frac{2n-1}{3}, d_4 = n-2。$$

- 当时间序列总项数小于20时，可在各段选取三项进行加权平均，权数从远至近取1，2，3，同样可以确定四个典型点的坐标，从而计算待估参数。



二、三次多项式曲线预测

■ 1. 参数估计

- 由于 n 奇偶不定，因此除了 d_1 和 d_4 以外，其余两个参数可能无法取得整数，这里要使 d_2 和 d_3 为整数，时间序列 Y_t ，的总项数 n 需满足 $n=20+3r$ ， r 为整数。当 n 不满足该条件时，可以删去最早的一期或两期数据，或删去受随机因素影响最大的数据来使其满足。



二、三次多项式曲线预测

■ 2. 三次多项式曲线模型的**适用条件**

- 判断预测对象是否可采用三次多项式曲线模型进行趋势预测的方法与二次多项式曲线的判断方法类似，可以用绘图法，也可以用数据分析法。在样本较少的情况下，第一种方法不失为一个较简便的方法，只需找到两个转折点即可；但在样本多的情况下，该方法就显得较为麻烦。这里还是建议用数据分析法，与二次多项式曲线的分析过程一样，都是**对时间序列作差分**，唯一不同的是，当数据符合三次多项式曲线趋势时，对其差分的次数要增加一次，才能使修正后的数据不受趋势影响，即以某一个常数变化。



第二节 对数曲线趋势预测



一、对数曲线模型

- 一般情况下，经济数据的时间序列较多地呈现出对数变化趋势，常见的**对数曲线模型**有三种：

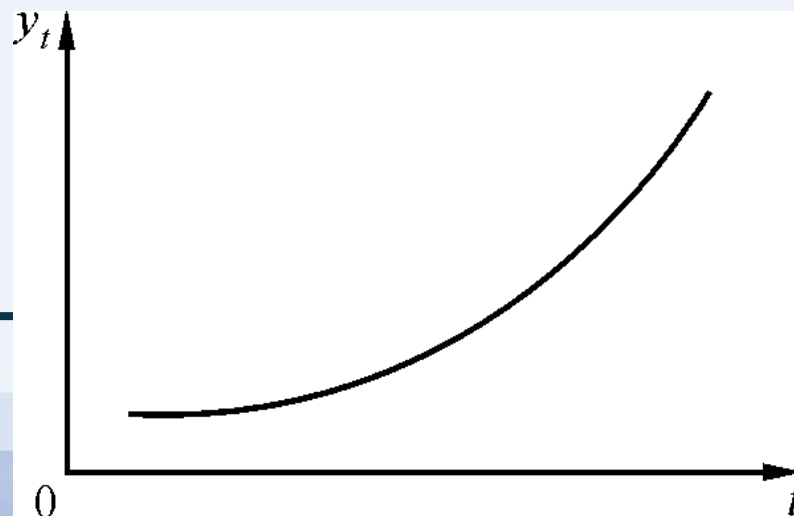
$$\ln Y_t = a + bt + u_t \quad (5.4)$$

$$\ln Y_t = a + b \ln t + u_t \quad (5.5)$$

$$Y_t = a + b \ln t + u_t \quad (5.6)$$

- 其中，最常见的对数模型为模型（5.4），经过变换有：

$$Y_t = e^{a+bt+u_t}$$



二、参数估计

- 回归模型预测法来估计该模型的参数, 该方法的基本思想为: 对因变量序列 Y_t 取对数后, 用新序列对时间 t 建立线性回归模型, 用OLS法估计参数 a, b 。
- 下面介绍一类新方法, 该方法可以利用自变量时间 t 的特点来求出参数。



二、参数估计

● 方法一：两点法

设已有的样本资料为 $(1, Y_1), (2, Y_2), \dots, (n, Y_n)$ ；设 $n=2m$ ，从而可将样本分为如下两部分：

样本一： $(1, Y_1), (2, Y_2), \dots, (m, Y_m)$

样本二： $(m+1, Y_{m+1}), (m+2, Y_{m+2}), \dots, (2m, Y_{2m})$

对每部分样本计算简单算术平均值或加权平均值，得到两点 $(\bar{t}_1, \bar{Y}_1)$ 和 $(\bar{t}_2, \bar{Y}_2)$ 。以简单算术平均法为例，均值的计算过程如下：

$$\bar{Y}_1 = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m}{m} \qquad \bar{t}_1 = \frac{n+2}{4}$$



二、参数估计

$$\bar{Y}_2 = \frac{Y_{m+1} + Y_{m+2} + \cdots + Y_{2m}}{m}$$

$$\bar{t}_2 = \frac{(m+1) + (m+2) + \cdots + 2m}{m} = \frac{3n+2}{4}$$

将这两点代入模型 (5.4)，有：

$$\begin{cases} \ln \bar{Y} = a + b\left(\frac{n+2}{4}\right) \\ \ln \bar{Y}_2 = a + b\left(\frac{3n+2}{4}\right) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \hat{b} = \frac{\ln(\frac{\bar{Y}_2}{\bar{Y}_1})}{\frac{n}{2}} = \frac{2 \ln(\frac{\bar{Y}_2}{\bar{Y}_1})}{n} \\ \hat{a} = \ln \bar{Y}_1 - \hat{b}\left(\frac{n+2}{4}\right) \end{cases}$$



二、参数估计

- **方法二：分段方程相加法**

该方法利用对数求和的特殊计算公式，对分段的样本求得两个方程，联立可解出参数为：

- 设样本资料

$$(1, Y_1), (2, Y_2), \dots, (m, Y_m)$$

$$(m+1, Y_{m+1}), (m+2, Y_{m+2}), \dots, (2m, Y_{2m})$$

- 分别将每个点代入模型（5-4）中，得到

$$\ln Y_1 = a + b$$

$$\ln Y_2 = a + 2b$$

$$\vdots$$

$$\ln Y_m = a + mb$$

$$\ln Y_{m+1} = a + (m+1)b$$

$$\vdots$$

$$\ln Y_{2m} = a + 2mb$$



二、参数估计

- 方法二：分段方程相加法

分别对前 m 个方程和后 m 个方差求和可得：

$$\begin{aligned}\ln Y_1 + \ln Y_2 + \cdots + \ln Y_m &= ma + b(1 + 2 + \cdots + m) \\ &= ma + b \frac{m(m+1)}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln Y_{m+1} + \ln Y_{m+2} + \cdots + \ln Y_{2m} &= ma + b[(m+1) + (m+2) + \cdots + 2m] \\ &= ma + b \frac{m(3m+1)}{2}\end{aligned}$$

化简可得：

$$\begin{cases} \ln(Y_1 Y_2 \cdots Y_m) = ma + b \frac{m(m+1)}{2} \\ \ln(Y_{m+1} Y_{m+2} \cdots Y_{2m}) = ma + b \frac{m(3m+1)}{2} \end{cases}$$



二、参数估计

- **方法二：分段方程相加法**

该方法利用对数求和的特殊计算公式，对分段的样本求得两个方程，联立可解出参数为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{b} = \frac{\ln\left(\frac{Y_{m+1}Y_{m+2} \cdots Y_{2m}}{Y_1Y_2 \cdots Y_{2m}}\right)}{m^2} \\ \hat{a} = \frac{1}{m} \ln(Y_1Y_2 \cdots Y_m) - \hat{b} \frac{m+1}{2} \\ \quad = \frac{1}{m} \ln(Y_1Y_2 \cdots Y_m) - \frac{m+1}{2m^2} \ln\left(\frac{Y_{m+1}Y_{m+2} \cdots Y_{2m}}{Y_1Y_2 \cdots Y_{2m}}\right) \end{array} \right.$$



二、参数估计

【例5-2】现已知某产品近8个月的销售量，试预测该产品在下一个月的销量。

表 5-2 某产品的月销售量数据

月份编号 t	1	2	3	4	5	6	7	8
销量(万件)	1.4	2	2.9	4.1	5.9	8.4	12	17.1

- 我们可以先观察这些数据的图像（见图5-4），以判断用何种模型来进行模拟。从散点图来看，该时间序列的动态趋势类似于图5-3，因此我们可以用对数曲线模型来拟合该数据。



二、参数估计

【例5-2】现已知某产品近8个月的销售量，试预测该产品在下一个月的销量。

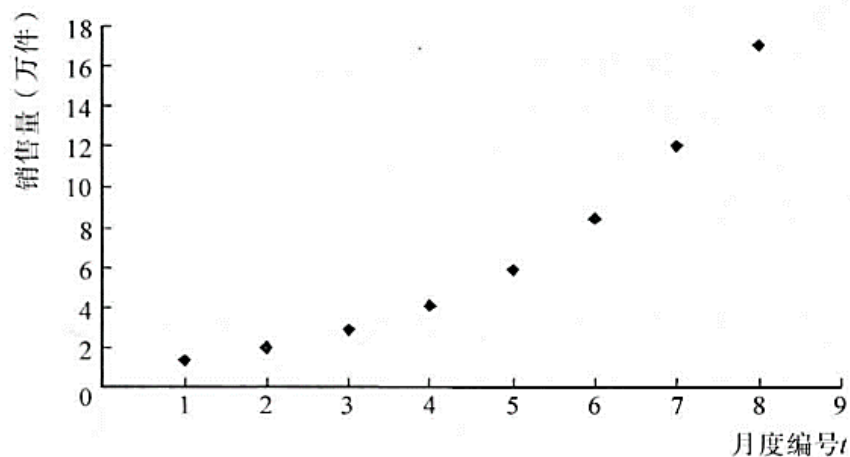


图 5-4 某产品月销售量

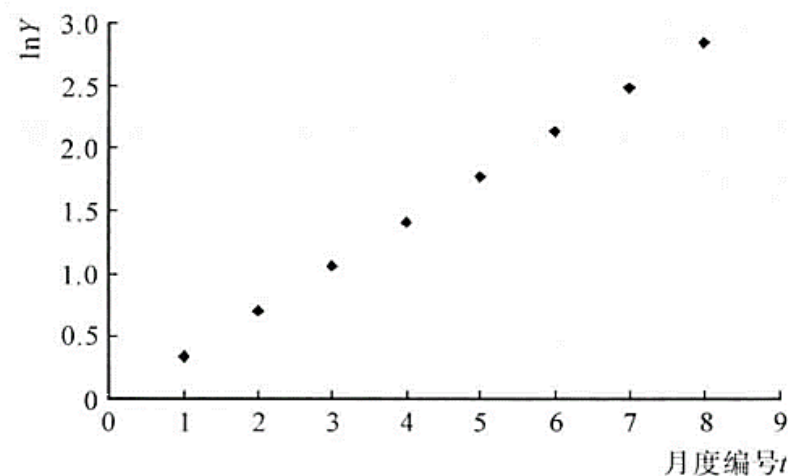


图 5-5 取对数后时间序列的图形



二、参数估计

【例5-2】现已知某产品近8个月的销售量，试预测该产品在下一个月的销量。

$$\ln Y_1 + \ln Y_2 + \cdots + \ln Y_4 = 4a + b(1 + 2 + 3 + 4)$$

$$\ln Y_5 + \ln Y_6 + \cdots + \ln Y_8 = 4a + b(5 + 6 + 7 + 8)$$

$$\hat{b} = \frac{1}{4^2} \ln \frac{Y_5 Y_6 Y_7 Y_8}{Y_1 Y_2 Y_3 Y_4} = \frac{1}{16} \ln \frac{5.9 \times 8.4 \times 12 \times 17.1}{1.4 \times 2 \times 2.9 \times 4.1} = 0.3576$$

$$\hat{a} = \frac{1}{4} \ln(Y_1 Y_2 Y_3 Y_4) - \frac{1}{4} \times 0.3576 \times 10 = -0.0177$$



第三节 指数曲线和修正指数曲线趋势预测



一、指数曲线模型

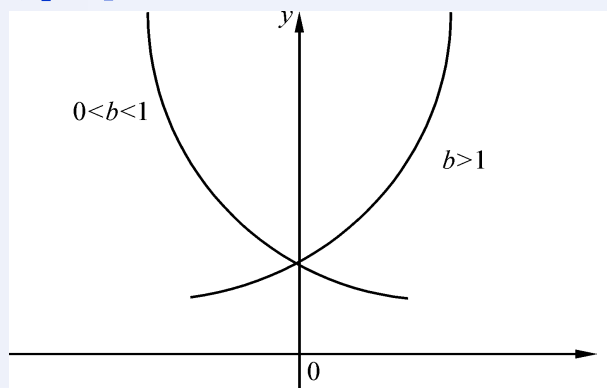
■ 指数曲线模型的一般形式为：

$$Y_t = ab^t + u_t \quad (5.7)$$

其中， a ， b 为模型参数（ $a>0$ ， $b>0$ ）， t 为时间变量， u_t 为误差项。

■ 指数曲线图形如图5-6所示。

图5-6 指数曲线



一、指数曲线模型

■ 1. 指数曲线模型的适用条件

- 指数曲线的特点是，时序中相邻两期之比即环比为一常数，即：

$$\frac{Y_t}{Y_{t-1}} = b$$

因此，在分析预测对象时，如果**时序各期环比**大致接近于某一个常数，我们便可对该时间序列采用指数曲线模型来进行预测。



一、指数曲线模型

■ 2. 参数估计

- 对指数函数 $Y_t = ab^t$ 两边取对数可得：

$$\ln Y_t = \ln a + t \ln b$$

令 $a^* = \ln a, b^* = \ln b$ ，则上式可写成：

$$\ln Y_t = a^* + b^* t \quad (5.8)$$



一、指数曲线模型

- 可见，指数曲线模型可化成**对数曲线模型**：

$$\ln Y_t = a^* + b^* t + u_t \quad (5.9)$$

- 对于式（5.9），可运用最小二乘法估计参数 a^* ， b^* ，然后通过式 $a = e^{a^*}$ 和 $b = e^{b^*}$ 求出 a ， b ；也可运用上一节介绍的两点法、分段方程相加法来求解参数。



二、修正指数曲线模型

- 现实中,常常有一些经济现象初期增长速度较快,随后逐渐减慢,最终趋向于某一稳定状态,并且在达到稳定状态之前,增长量的增长速度各期大体相等。修正指数曲线模型可以描述上述发展过程有饱和现象的一种增长规律。

- **修正指数曲线模型为:**

$$Y_t = k + ab^t + u_t \quad (5.10)$$

- 其中, k , a , b 为参数 ($k > 0$, $a < 0$, $0 < b < 1$), t 为时间变量, u_t 为误差项。



二、修正指数曲线模型

(1) 当 $k > 0$, $a < 0$, $0 < b < 1$ 时, 有 $\hat{y}'_t > 0$, $\hat{y}''_t < 0$; 此时 $\hat{y}_t$ 是单调递增的, $\hat{y}'_t$ 是递减的, 可知 $\hat{y}'_t$ 的图形是凸的。当 $t=0$ 时, $\hat{y}_t = k + a$ ($a < 0$), 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 因为 $b^t \rightarrow 0$, 可得 $\hat{y}_t \rightarrow k$, 因此 $\hat{y}_t = k$ 是它的渐近线。由以上分析可知, $\hat{y}_t$ 随着 t 的增加而增加, 增长速度是先快后慢, 最后接近于高限 k 。其图形如图 5-2 所示。

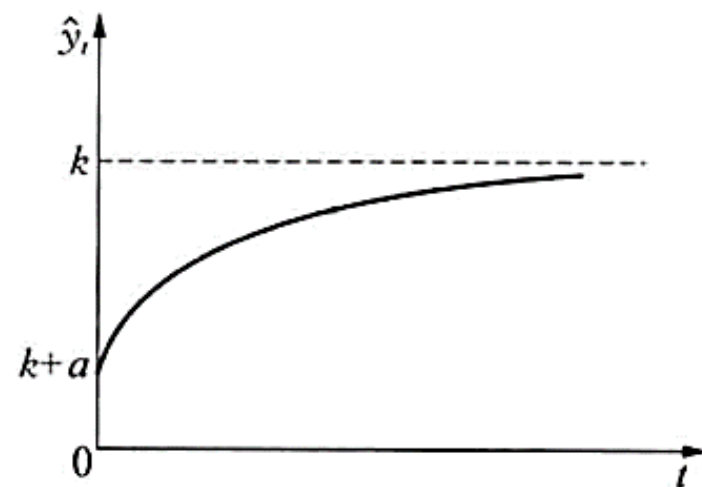


图 5-2 $\hat{y}_t = k + ab^t$ ($k > 0$, $a < 0$, $0 < b < 1$)

因此, 当某变量的变动规律是初期增长较快, 随后增长速度逐渐放慢, 最后趋向某一正常极限时, 可用修正指数曲线来描述。



二、修正指数曲线模型

(2) 当 $k > 0$, $a > 0$, $0 < b < 1$ 时, 有 $\hat{y}'_t < 0$, $\hat{y}''_t > 0$; 此时 $\hat{y}_t$ 是递减的, 且图形是凹的。当 $t = 0$ 时, $\hat{y}_t = k + a$ ($a > 0$), 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 可得 $\hat{y}_t \rightarrow k$ 是它的渐近线。这说明 $\hat{y}_t$ 随着 t 的增加而减少, 递减速度是先快后慢, 最后接近于底限 k , 其图形如图 5-3 所示。

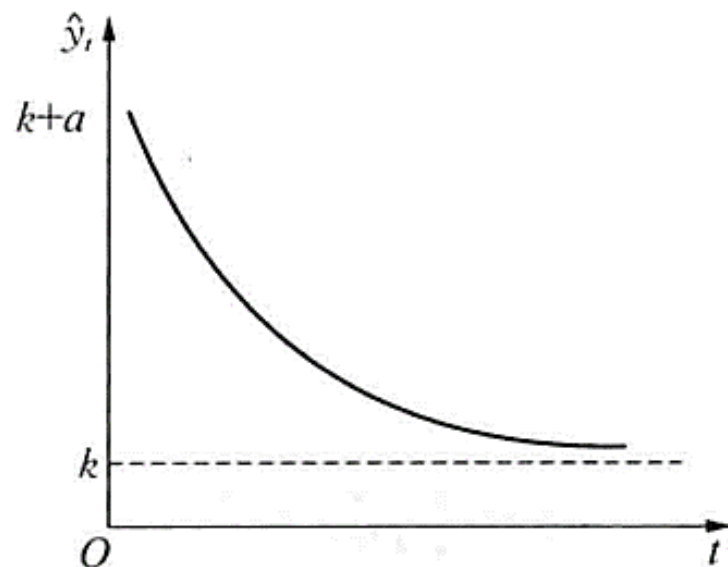


图 5-3 $\hat{y}_t = k + ab^t$ ($k > 0$, $a > 0$, $0 < b < 1$)

由上述分析可得：修正指数曲线还可用来描述初期减少较快，随后减少比较缓慢，最后趋向某一正常数极限的经济变量。



二、修正指数曲线模型

■ 1. 修正指数曲线模型的适用条件

- 修正指数曲线的特点是，一阶差分的环比为一常数，根据这一特征，当时间序列 Y_t 的一阶差分序列 ΔY_t 的环比近似于一常数时，可配合修正指数曲线模型来进行预测。

$$\begin{aligned}\nabla \hat{y}_t &= (k + ab^t) - (k + ab^{t-1}) \\ &= a(b - 1)b^{t-1}\end{aligned}$$



二、修正指数曲线模型

■ 2. 参数估计

- 对于修正指数曲线模型，设 $t=1, 2, \dots, n$, $n=3m$, 则参数 k, a, b 的估计值可采用三点法或分段方程相加法来求得。

- **方法一：三点法**

把 Y_t 分成三段 $(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$,

$(Y_{m+1}, Y_{m+2}, \dots, Y_{2m})$, $(Y_{2m+1}, Y_{2m+2}, \dots, Y_{3m})$ 。



二、修正指数曲线模型

- 对这三段样本数据，分别在每段中选取一定量的项进行加权平均或简单算术平均，得到 $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{Y}_3$ ，与相应的时间均值可构成 $(\bar{t}_1, \bar{Y}_1), (\bar{t}_2, \bar{Y}_2), (\bar{t}_3, \bar{Y}_3)$ 三个点，代入模型 (5.10) 中可得三个方程，解方程组从而得到参数估计值。

$$\begin{aligned}\bar{Y}_1 &= \frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_m}{m} \\ \bar{Y}_2 &= \frac{Y_{m+1} + Y_{m+2} + \cdots + Y_{2m}}{m} \\ \bar{Y}_3 &= \frac{Y_{2m+1} + Y_{2m+2} + \cdots + Y_{3m}}{m}\end{aligned}$$

$$\bar{t}_1 = \frac{m+1}{2}, \bar{t}_2 = \frac{3m+1}{2}, \bar{t}_3 = \frac{5m+1}{2}$$



二、修正指数曲线模型

$$\begin{cases} \overline{Y_1} = k + ab^{\frac{m+1}{2}} \\ \overline{Y_2} = k + ab^{\frac{3m+1}{2}} \\ \overline{Y_3} = k + ab^{\frac{5m+1}{2}} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \hat{b} = \sqrt[m]{\frac{\overline{Y_3} - \overline{Y_2}}{\overline{Y_2} - \overline{Y_1}}} \\ \hat{a} = \frac{\overline{Y_2} - \overline{Y_1}}{\hat{b}^{\frac{m+1}{2}} (\hat{b}^m - 1)} \\ \hat{k} = \frac{\overline{Y_1} \hat{b}^m - \overline{Y_2}}{\hat{b}^m - 1} \end{cases}$$



二、修正指数曲线模型

● 方法二：分段方程相加法

与之前估计对数曲线参数的原理相同，我们在假设该模型成立的基础上，将各个样本点的值分别代入模型，可得 $3m$ 个方程，然后分别对前 m 个方程、中间 m 个方程和后 m 个方程相加，化为3个方程，联立这3个方程求解即可得到3个未知参数 a ， b ， k 的估计值。



二、修正指数曲线模型

●方法二：分段方程相加法

将各样本点的值分别带入模型

$$Y_1 = k + ab$$

$$Y_2 = k + ab^2$$

$$\vdots$$

$$Y_m = k + ab^m$$

$$Y_{m+1} = k + ab^{m+1}$$

$$\vdots$$

$$Y_{2m} = k + ab^{2m}$$

$$Y_{2m+1} = k + ab^{2m+1}$$

$$\vdots$$

$$Y_{3m} = k + ab^{3m}$$

$$mk + ab(1 + b + b^2 + \cdots + b^{m-1}) = mk + ab \frac{b^m - 1}{b - 1}$$

$$mk + ab^{m+1}(1 + b + b^2 + \cdots + b^{m-1}) = mk + ab^{m+1} \frac{b^m - 1}{b - 1}$$

$$mk + ab^{2m+1}(1 + b + b^2 + \cdots + b^{m-1}) = mk + ab^{2m+1} \frac{b^m - 1}{b - 1}$$

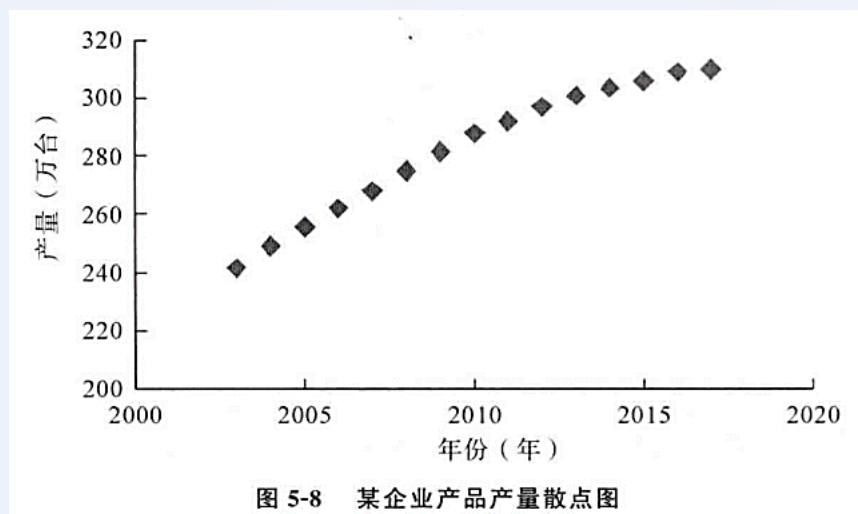
二、修正指数曲线模型

● 方法二：分段方程相加法

$$\begin{cases} \hat{b} = \sqrt[m]{\frac{\sum_{t=2m+1}^{3m} Y_t - \sum_{t=m+1}^{2m} Y_t}{\sum_{t=m+1}^{2m} Y_t - \sum_{t=1}^m Y_t}} \\ \hat{a} = \left(\sum_{t=m+1}^{2m} Y_t - \sum_{t=1}^m Y_t \right) \frac{\hat{b} - 1}{\hat{b} (\hat{b}^m - 1)^2} \\ \hat{k} = \frac{1}{m} \left(\sum_{t=1}^m Y_t - \frac{\sum_{t=m+1}^{2m} Y_t - \sum_{t=1}^m Y_t}{\hat{b}^m - 1} \right) \end{cases}$$

二、修正指数曲线模型

【例5-3】某企业2003—2017年产品产量(单位:万台)资料如表5-4所示试预测该企业2018年的产品产量。设该企业的产品产量为 Y_t , 绘制散点图, 如图5-8所示



从图形看出, 产品产量有类似于修正指数曲线的变动趋势, 产品产量的增长速度起初较快, 之后逐渐减慢, 并有一个平缓的极限趋势

二、修正指数曲线模型

【例5-3】某企业2003—2017年产品产量(单位:万台)
资料如表5-4所示试预测该企业2018年的产品产量。

表 5-4 某企业产品产量序列及其特征

年份	年份 编号 t	产品产量 Y_t (万吨)	一阶差分 ΔY_t	一阶差分的环比 $\frac{\Delta Y_{t+1}}{\Delta Y_t}$
2003 年	1	241.53	—	—
2004 年	2	248.98	7.45	—
2005 年	3	255.58	6.61	0.89
2006 年	4	261.97	6.38	0.97
2007 年	5	268.07	6.10	0.96
2008 年	6	274.74	6.66	1.09
2009 年	7	281.40	6.66	1.00
2010 年	8	287.84	6.44	0.97
2011 年	9	292.04	4.20	0.65
2012 年	10	297.19	5.15	1.23
2013 年	11	300.89	3.70	0.72
2014 年	12	303.46	2.58	0.70
2015 年	13	305.90	2.43	0.94
2016 年	14	309.02	3.12	1.28
2017 年	15	310.00	0.98	0.32

对数据进行一阶差分后再求环比指数,可以看出环比序列在自然数1左右变动,即各期产品产量增长量的增长速度大体相等,基本符合修正指数模型的数值特征。因此,这里用修正的指数模型来模拟。

第四节 S形曲线预测模型



S型曲线预测模型

- 在前几节所讨论的曲线模型中, 我们或者认为曲线的斜率随着时间增加而增加(如**对数曲线模型**), 或者随着时间增加而减少(如**修正指数曲线模型**), 这意味着我们假设经济现象的变化速度仅有一种状态, 或者变化速度加快, 或者减慢。
- 但对于我们所研究的真实世界来说, 很多经济现象常常具有如下特征: **初期增长速度较慢, 随后增长速度逐渐加快, 达到一定程度后, 增长速度又开始下降, 到后期逐渐趋于一条饱和直线, 增长速度基本上稳定于零。**



S型曲线预测模型

- 从图形上看, 这一过程类似于一条S形曲线。曲线的明显特征是有**一个拐点和一个增长的极限(某一条饱和直线)**。拐点即增长速度由上升转为下降的点, 从微积分的角度来看, **曲线在该点的二阶导数为零**。
- 一般用来拟合这类数据的模型有两个: 冈珀茨(Gompertz)曲线和逻辑斯谛(logistic)曲线。由于这两个曲线能反映具有生命周期特征的现象, 例如产品市场寿命、人口预测等, 因此它们也被称为**生命周期曲线**。



一、冈珀茨曲线模型

- **冈珀茨曲线**是英国统计学家和数学家冈珀茨提出的，该曲线描述了这样一种发展趋势，初期增长速度较慢，随后增长速度逐渐加快，达到一定程度后，增长速度又逐渐减慢，到后期逐渐趋于一条饱和直线。
- **冈珀茨曲线模型的一般形式为：**

$$Y_t = ka^{b^t} + u_t \quad (5.11)$$

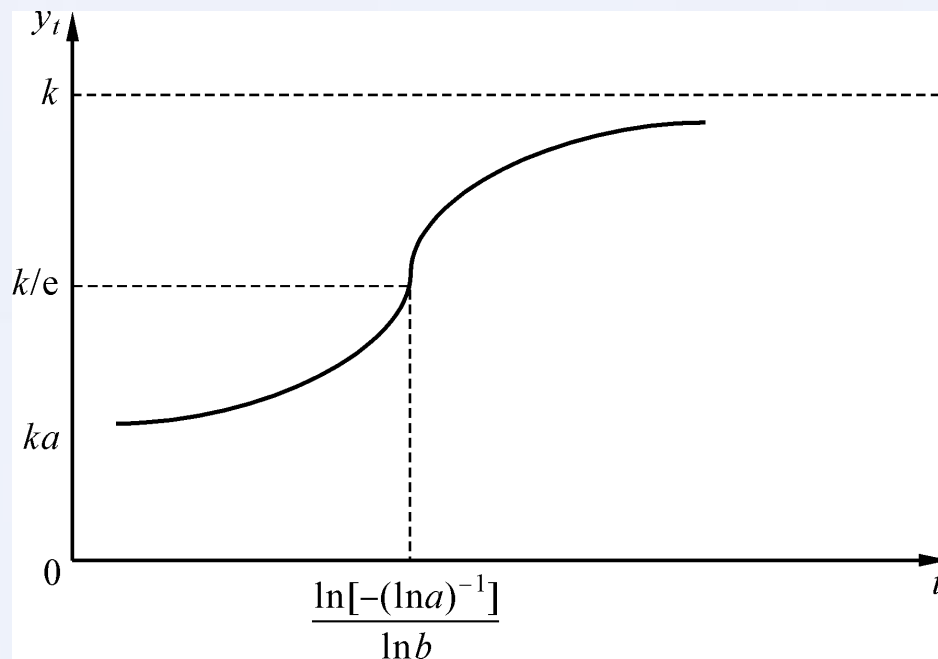
其中， k , a , b 为参数， t 为时间变量， u_t 为误差项。



一、冈珀茨曲线模型

■ 几何图形如图5-9所示：

图5-9冈珀茨曲线



二阶函数求导为0



一、冈珀茨曲线模型

- 根据式 (5.11) 可知, $t=0$ 时, $Y_t = ka$; 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $Y_t = k$; 当 $t \rightarrow -\infty$ 时, $Y_t = 0$; k 是该曲线的上限。可以计算得到, 曲线的拐点为 $(\frac{\ln[-(\ln a)^{-1}]}{\ln b}, \frac{k}{e})$, 曲线不关于拐点对称。



一、冈珀茨曲线模型

■ 1. 冈珀茨曲线模型的适用条件

- 实际上，冈珀茨曲线模型可以转化为修正指数曲线模型。

对冈珀茨曲线 $Y_t = ka^{b^t}$ 的两端取自然对数，有：

$$\ln Y_t = \ln k + b^t \ln a$$

设 $Y_t^* = \ln Y_t, k^* = \ln k, a^* = \ln a$ ，则上式可化简为修正指数曲线：

$$Y_t^* = k^* + a^* b^t \quad (5.12)$$



一、冈珀茨曲线模型

■ 1. 冈珀茨曲线模型的适用条件

- 由前面的学习我们已知, 修正指数曲线的时序的一阶差分的环比为一常数。从而可知, 冈珀茨曲线的时序**取对数后的一阶差分的环比也为一常数**。因此, 当时序取对数后的一阶差分的环比近似为一常数时, 我们可以用冈珀茨曲线模型来模拟。

一、冈珀茨曲线模型

■ 2. 参数估计

- 对冈珀茨曲线模型的参数 k , a , b 的估计可以先将模型取对数后, 用修正曲线的参数估计方法, 求得 $\hat{k}, \hat{a}, \hat{b}$, 然后再利用等式 $k^* = \ln k, a^* = \ln a$ 求出 k 和 a 的估计值。

- 具体的计算公式如下:
- $$\left\{ \begin{array}{l} \hat{b} = m \sqrt{\frac{\sum_3 \ln Y_t - \sum_2 \ln Y_t}{\sum_2 \ln Y_t - \sum_1 \ln Y_t}} \\ \hat{k} = e^{\hat{k}^*} \\ \hat{a} = e^{\hat{a}^*} \end{array} \right.$$



一、冈珀茨曲线模型

- 其中,

$$\hat{a}^* = (\sum_2 \ln Y_t - \sum_1 \ln Y_t) \frac{\hat{b} - 1}{\hat{b}(\hat{b}^m - 1)^2}$$

$$\hat{k}^* = \frac{1}{m} \left[\sum_1 \ln Y_t - \frac{(\sum_2 \ln Y_t - \sum_1 \ln Y_t)}{\hat{b}_m - 1} \right]$$

- $\sum_i \ln Y_t (i=1,2,3)$ 表示将时序分为期数相等的三段后的各段样本值取对数后的和。



一、冈珀茨曲线模型

【例5-4】某公司生产MP3产品，表5-5中第1列是MP3近9个月的销量(单位:件), 试预测第10个月第11个月的销售量。

绘制数据的散点图(见图 5-10), 可以发现曲线在前3个左右增长的速度较为平缓, 从第4个月到第7个月销售量增长速度有明显加快, 到了第8、9个月增长的速度有所减慢。因此我们直观上判断, 该时间序列可以用冈珀茨曲线模型来描述。

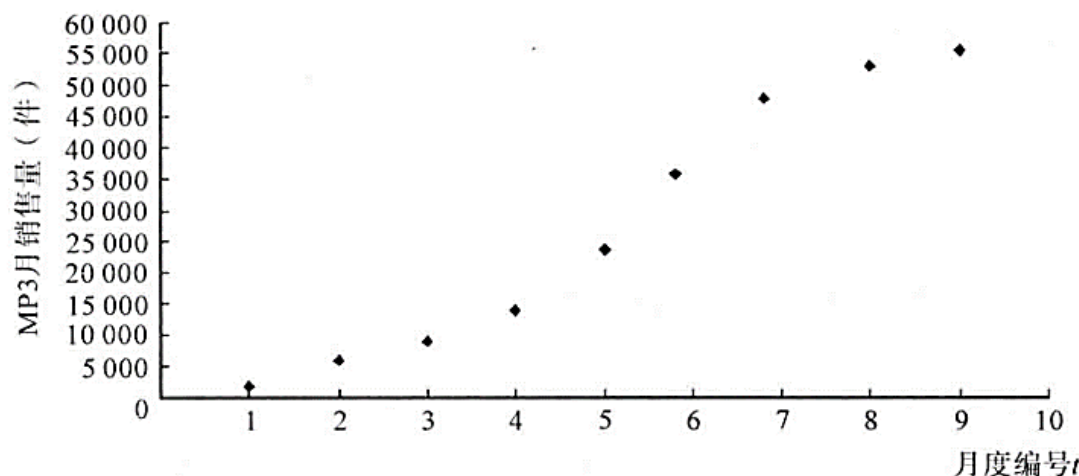


图 5-10 某公司 MP3 月销售量的散点图



一、冈珀茨曲线模型

【例5-4】某公司生产MP3产品，表5-5中第1列是MP3近9个月的销量(单位:件)，试预测第10个月第11个月的销售量。

表5-5的第5列显示了**时序对数的一阶差分环比**，可以认为其**收敛于一常数**。因此，根据数值特征，我们也可以得出用冈珀茨曲线来描述的结论。

表 5-5 MP3 销售量计算表

t	Y_t	$\ln Y_t$	$\Delta \ln Y_t$	$\frac{\Delta \ln Y_{t+1}}{\Delta \ln Y_t}$	$\sum_i \ln Y_t$
1	1 890	7.544	—	—	$\sum_1 \ln Y_t = 25.349$
2	6 000	8.700	1.155	—	
3	9 000	9.105	0.405	0.351	
4	14 000	9.547	0.442	1.090	$\sum_2 \ln Y_t = 30.102$
5	23 600	10.069	0.522	1.182	
6	35 800	10.486	0.417	0.798	
7	47 910	10.777	0.291	0.699	$\sum_3 \ln Y_t = 32.581$
8	53 010	10.878	0.101	0.347	
9	55 600	10.926	0.048	0.472	



二、逻辑斯蒂曲线模型

- **逻辑斯蒂曲线模型**又称为逻辑曲线或推理曲线，是由比利时数学家哈尔斯特研究人口增长规律时提出的。该曲线与冈珀茨曲线很相近，其时间序列的变化趋势为初期增长缓慢，随后一个阶段急剧增长，达到一定程度后，增长速度减慢，最后达到饱和状态。
- **逻辑斯蒂曲线模型最常见的形式为：**

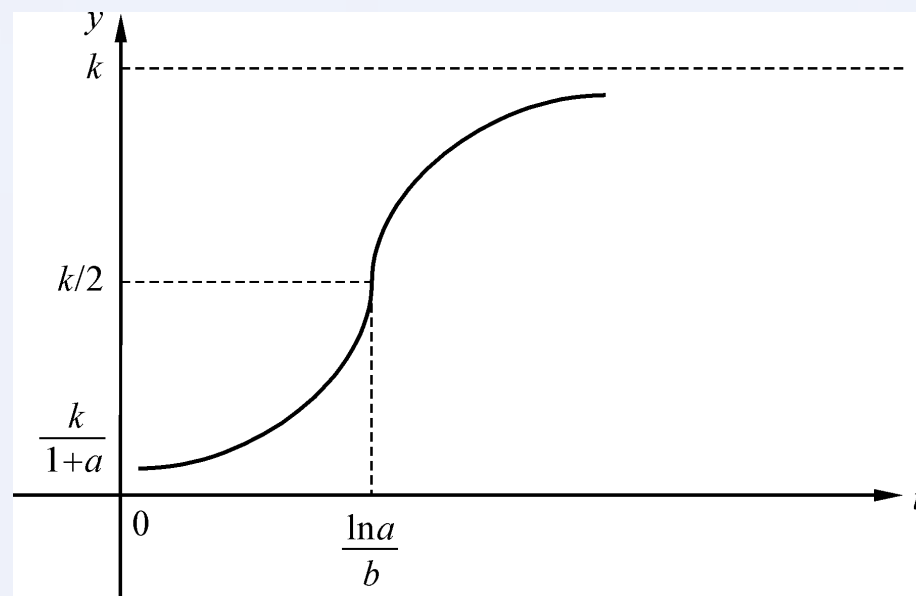
$$Y_t = \frac{k}{1 + ae^{-bt}} + u_t \quad (5.13)$$



二、逻辑斯蒂曲线模型

- 其中， k ， a ， b 为模型参数； k 称为**极限参数**，它意味着 Y_t 处于饱和状态时的值。如图5-11所示：

图5-11 逻辑斯蒂曲线



二、逻辑斯蒂曲线模型

- 根据式 (5.13) 可知, $t=0$ 时, $Y_t = \frac{k}{1+a}$; $t \rightarrow +\infty$ 时, $Y_t = k$; $t \rightarrow -\infty$ 时, $Y_t = 0$; k 是该曲线的上限。可以计算出曲线的拐点为 $(\frac{\ln a}{b}, \frac{k}{2})$, **曲线关于拐点对称。**
- 事实证明, 逻辑斯蒂曲线可以很好地描述耐用消费品 (如电视、电冰箱等) 的普及过程、技术发展过程等经济现象的变化特征。



二、逻辑斯蒂曲线模型

■ 1. 逻辑斯蒂曲线模型的适用条件

- 将逻辑斯蒂曲线 $Y_t = \frac{k}{1 + ae^{-bt}}$ 两边取倒数，原模型变为：

$$\frac{1}{Y_t} = \frac{1 + ae^{-bt}}{k} = \frac{1}{k} + \frac{ae^{-bt}}{k}$$

令 $Y_t^* = \frac{1}{Y_t}, k^* = \frac{1}{k}, a^* = \frac{a}{k}, b^* = e^{-b}$ ，从而有：

$$Y_t^* = k^* + a^* b^{*t} \quad (5.14)$$

即逻辑斯蒂曲线求倒数后，可以转变为修正指数曲线。



二、逻辑斯蒂曲线模型

■ 1. 逻辑斯蒂曲线模型的适用条件

- 这说明, 如果对一个时间序列取倒数后, 其一阶差分的环比序列近似于一常数, 则可以用逻辑斯蒂曲线来模拟。需要注意的是, 此时趋近的常数为 e^{-b} , 它不同于冈珀茨曲线模型趋近的常数 b 。

二、逻辑斯蒂曲线模型

■ 2. 参数估计

- 由于该模型的倒数方程即为修正指数曲线模型，因此，修正指数曲线模型的参数估计原理可用于逻辑斯蒂曲线的参数估计。

- 令 $Y_t^* = \frac{1}{Y_t}$, $k^* = \frac{1}{k}$, $a^* = \frac{a}{k}$, $b^* = e^{-b}$ ，逻辑斯蒂曲线模型可转变为：

$$Y_t^* = k^* + a^* b^{*t} + u_t$$



二、逻辑斯蒂曲线模型

● 可求得：

$$\begin{aligned}\sum_1 Y &= \sum_{t=1}^m Y_t^* = \sum_{t=1}^m \frac{1}{Y_t} \\ \sum_2 Y &= \sum_{t=m+1}^{2m} Y_t^* = \sum_{t=m+1}^{2m} \frac{1}{Y_t} \\ \sum_3 Y &= \sum_{t=2m+1}^{3m} Y_t^* = \sum_{t=2m+1}^{3m} \frac{1}{Y_t} \\ R_1 &= \sum_2 Y - \sum_1 Y \\ R_2 &= \sum_3 Y - \sum_2 Y\end{aligned}$$

$$\hat{b} = -\ln b^* = -\ln \sqrt[m]{\frac{R_2}{R_1}} = \frac{1}{m} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

$$\hat{k} = \frac{1}{k^*} = \frac{m}{\sum_1 Y - \frac{R_1^2}{R_2 - R_1}}$$

$$\hat{a} = \hat{k}a^* = \frac{kR_1(e^{-b} - 1)}{e^{-b}(e^{-bm} - 1)^2}$$



二、逻辑斯蒂曲线模型

【例5-5】某化妆品2003年到2017年的销售额资料如表5-6所示试用逻辑斯蒂曲线对该化妆品2018年的销售额进行预测。

表 5-6 某化妆品销售额资料

单位:万元

年份	年份编号 t	销售额	年份	年份编号 t	销售额
2003 年	1	37.8	2011 年	9	96.7
2004 年	2	41.9	2012 年	10	98.7
2005 年	3	48.3	2013 年	11	104.9
2006 年	4	54.6	2014 年	12	109.2
2007 年	5	67.1	2015 年	13	113.2
2008 年	6	79.9	2016 年	14	123.9
2009 年	7	86.0	2017 年	15	125.9
2010 年	8	92.4			



二、逻辑斯蒂曲线模型

【例5-5】某化妆品2003年到2017年的销售额资料如表5-6所示试用逻辑斯蒂曲线对该化妆品2018年的销售额进行预测。

从图形上看，该化妆品的销售额在2005年以前增长较慢，但在2006—2009年间有较快的增长，销售额快速膨胀，接着在2011年之后销售额增长趋缓，之后呈勾速增加的趋势。

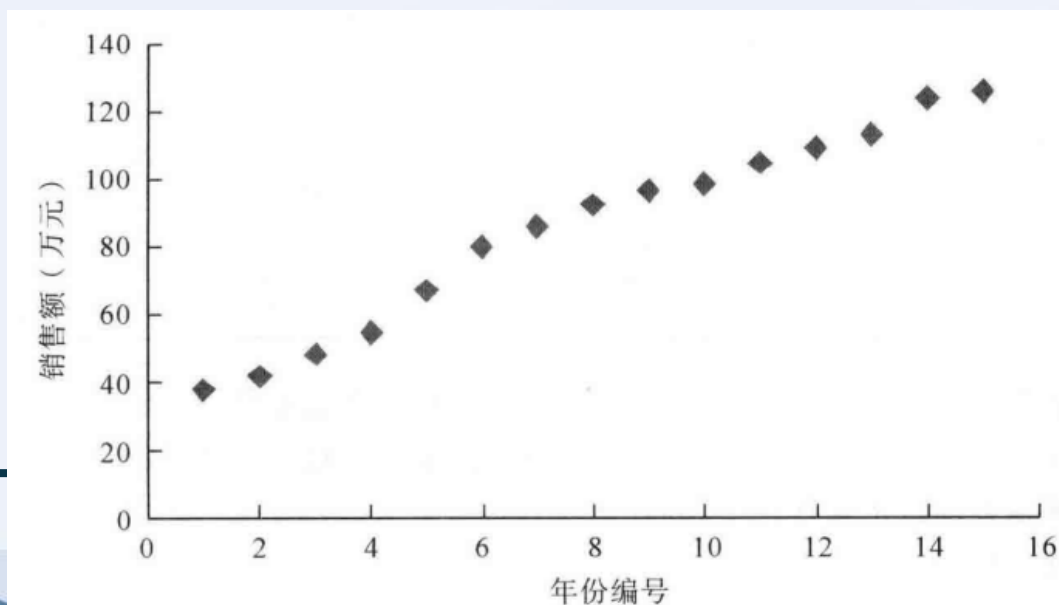


图 5-12 某化妆品 2003—2017 年的销售额散点图



二、逻辑斯蒂曲线模型

【例5-5】某化妆品2003年到2017年的销售额资料如表5-6所示试用逻辑斯谛曲线对该化妆品2018年的销售额进行预测。

表5-7中对销售额序列做了处理, 求出各期的倒数差分环比数列, 可以看出基本上在常数1左右波动, 从而认为其趋近于一常数。因此, 我们认为这里用逻辑斯谛曲线来描述是适宜的。

表 5-7 化妆品销售额计算表

年份	t	销售额 (万元)	$\frac{1}{Y_t}$	$\Delta \frac{1}{Y_t} = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_{t-1}}$	$\frac{\Delta \frac{1}{Y_t}}{\Delta \frac{1}{Y_{t-1}}}$
2003 年	1	37.8	0.026 46	—	—
2004 年	2	41.9	0.023 87	-0.002 6	—
2005 年	3	48.3	0.020 70	-0.003 2	1.221 6
2006 年	4	54.6	0.018 32	-0.002 4	0.755 4
2007 年	5	67.1	0.014 90	-0.003 4	1.428 2
2008 年	6	79.9	0.012 52	-0.002 4	0.699 8
2009 年	7	86.0	0.011 63	-0.000 9	0.371 8
2010 年	8	92.4	0.010 82	-0.000 8	0.907 2
2011 年	9	96.7	0.010 34	-0.000 5	0.597 5



第五节 非线性趋势预测案例



案例

- 【例5-6】已知某公司1997—2017年产品销售额资料试选用合适的非线性趋势模型预测该公司2018 年和2019年的产品销售额。

表 5-8 某公司 1997—2017 年产品销售额资料

单位:万元

年份	销售额	年份	销售额
1997 年	3 410	2008 年	4 450
1998 年	3 435	2009 年	4 517
1999 年	3 500	2010 年	4 566
2000 年	3 601	2011 年	4 629
2001 年	3 698	2012 年	4 674
2002 年	3 796	2013 年	4 703
2003 年	3 940	2014 年	4 758
2004 年	4 069	2015 年	4 780
2005 年	4 225	2016 年	4 820
2006 年	4 335	2017 年	4 840
2007 年	4 411		



案例

为了从直观上判断该时间序列适合用哪种模型来进行预测, 首先画出其散点图。

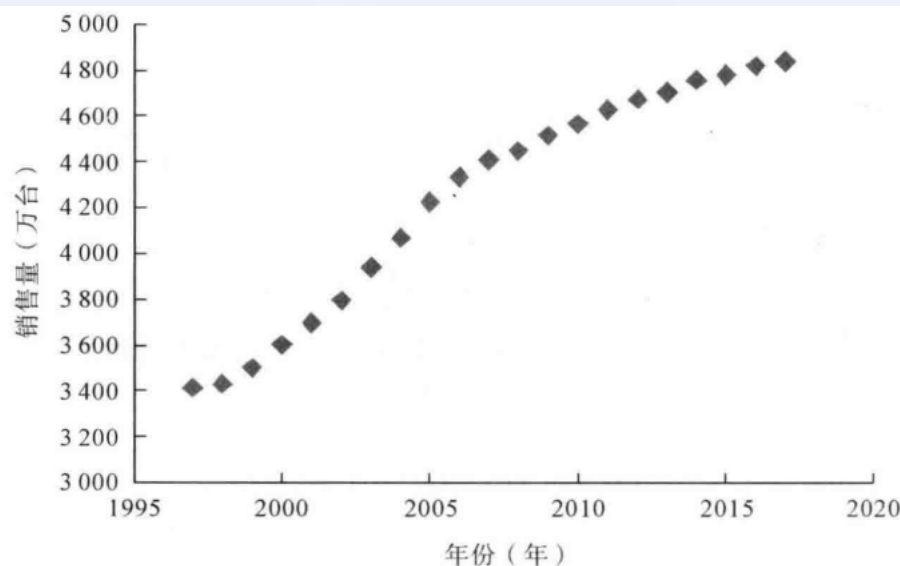


图 5-13 某公司 1997—2017 年产品销售额散点图

从图 5-13 来看, 该时序有修正指数曲线变动的趋势, 因此可以考虑用修正指数曲线模型。

同时, 也发现该散点图在变动过程中有不明显的增长速度的变动, 特别是在 2004 年至 2006 年, 销售额增长速度由较快趋于平缓, 因此很可能该数据也可以用逻辑斯谛曲线来模拟。



案例

- 为了确定较合适的预测模型, 对数据进行差分和取倒数的处理, 以求从数据本身特征寻找判断的依据。

表 5-9 产品销售额计算表

年份	t	销售额 Y_t	$\frac{\Delta Y_t}{\Delta Y_{t-1}}$	$\frac{\Delta \frac{1}{Y_t}}{\Delta \frac{1}{Y_{t-1}}}$
1997 年	1	3 410	—	—
1998 年	2	3 435	—	—
1999 年	3	3 500	2.600 000	2.500 000
2000 年	4	3 601	1.553 846	1.600 000
2001 年	5	3 698	0.960 396	1.000 000
2002 年	6	3 796	1.010 309	0.875000
2003 年	7	3 940	1.469 388	1.285 714
2004 年	8	4 069	0.895 833	0.888 889
2005 年	9	4 225	1.209 302	1.125 000
2006 年	10	4 335	0.705 128	0.666 667
2007 年	11	4 411	0.690 909	0.666 667

表5-9中第4列和第5列分别列出了时序差分环比指数和时序倒数的差分环比指数, 可以分别用来判断时序是否具有修正指数曲线或逻辑斯谛曲线特征。

案例

- 从数据特征来看, 两列指数都在自然数1左右波动, 但从波动的幅度上来看, 有时序差分环比指数波动率小于时序倒数的差分环比指数波动率。
- 为了进一步确定模型, 考虑用逻辑斯谛曲线模型和修正指数曲线模型分别对该序列进行模拟预测, 通过比较两模型预测残差 $(Y_t - \hat{Y}_t)$ 的平方和, 最终决定选用哪种模型进行预测。

案例

- 1. 修正指数曲线模型
- 由题意可知 $n=21$, $m=7$ 。根据参数估计公式, 有

$$\begin{aligned}\hat{b} &= \sqrt[7]{\frac{33\,204 - 30\,573}{30\,573 - 25\,380}} \approx 0.907\,4 \\ \hat{a} &= (30\,573 - 25\,380) \times \frac{0.907\,4 - 1}{0.907\,4 \times (0.907\,4^7 - 1)^2} \approx -2\,176.109\,8 \\ \hat{k} &= \frac{1}{7} \times \left(25\,380 - \frac{30\,573 - 25\,380}{0.907\,4^7 - 1} \right) \approx -5\,129.013\,5\end{aligned}$$

- 因而修正指数曲线模型为

$$\hat{Y}_t = 5\,129.013\,5 - 2\,176.109\,8 \times 0.907\,4^t$$

案例

■ 2. 逻辑斯蒂曲线模型

■ 由题意可知 $n=21$, $m=7$ 。根据参数估计公式, 有

$$R_1 = \sum_2 \frac{1}{Y_t} - \sum_1 \frac{1}{Y_t} = 0.001\ 606 - 0.001\ 935 = -0.000\ 329$$

$$R_1 = \sum_3 \frac{1}{Y_t} - \sum_2 \frac{1}{Y_t} = 0.001\ 476 - 0.001\ 606 = -0.000\ 329$$

■ 从而有

$$\hat{b} = \frac{1}{7} \ln \left(\frac{-0.000\ 329}{-0.000\ 130} \right) = 0.132\ 6$$

$$\hat{k} = \frac{7}{0.001\ 935 - \frac{(-0.000\ 329)^2}{-0.000\ 130 + 0.000\ 329}} = 5\ 032.078\ 1$$

$$\hat{a} = \frac{5\ 032.078\ 1 \times (-0.000\ 329) \times (e^{-0.132\ 6} - 1)}{e^{-0.132\ 6} (e^{-0.132\ 6 \times 7} - 1)^2} = 0.641\ 9$$

■ 因而逻辑斯蒂曲线模型为

$$\hat{Y}_t = \frac{5\ 032.078\ 1}{1 + 0.641\ 9 \times e^{-0.132\ 6t}}$$

案例

- 为了比较两模型的优劣, 将 $t=1, 2, \dots, 21$ 分别代入两个模型中, 求出1997—2017年产品销售额的拟合值, 然后分别求出两个模型的残差平方和 $\sum (Y_t - \hat{Y}_t^h)^2, h=1, 2$ 。结果如表 5-12所示, 其中 $\hat{Y}_t^1, \hat{Y}_t^2$ 分别表示修正指数曲线模型的拟合值和逻辑斯谛曲线模型的拟合值。
- 从计算结果可知, 修正指数模型的残差平方和要远大于逻辑斯谛曲线模型的残差平方和, 这说明逻辑斯谛曲线模型的拟合效果更好。因此, 本例最终选用逻辑斯谛曲线模型来进行预测。

案例

- 我们将 $t=22$, $t=23$ 代入模型, 可计算出该公司2018年和2019年的销售额的预测值分别为:

$$\hat{Y}_{22} = \frac{5\,032.078\,1}{1 + 0.641\,9 \times e^{-0.132\,6 \times 22}} \approx 4\,863.240\,5 (\text{万元})$$

$$\hat{Y}_{23} = \frac{5\,032.078\,1}{1 + 0.641\,9 \times e^{-0.132\,6 \times 23}} \approx 4\,883.588\,8 (\text{万元})$$

思考与练习

■ 1. 简述如何识别以下几种非线性曲线模型。

(1) 多项式曲线模型



(2) 修正指数曲线模型



(3) 对数曲线模型



(4) 冈珀茨曲线模型



(5) 逻辑斯蒂曲线模型



思考与练习

- 2. 试述用三点法估计增长曲线模型参数的基本思想。



- 3. 试述用分段求和法估计增长曲线模型参数的基本思想。

