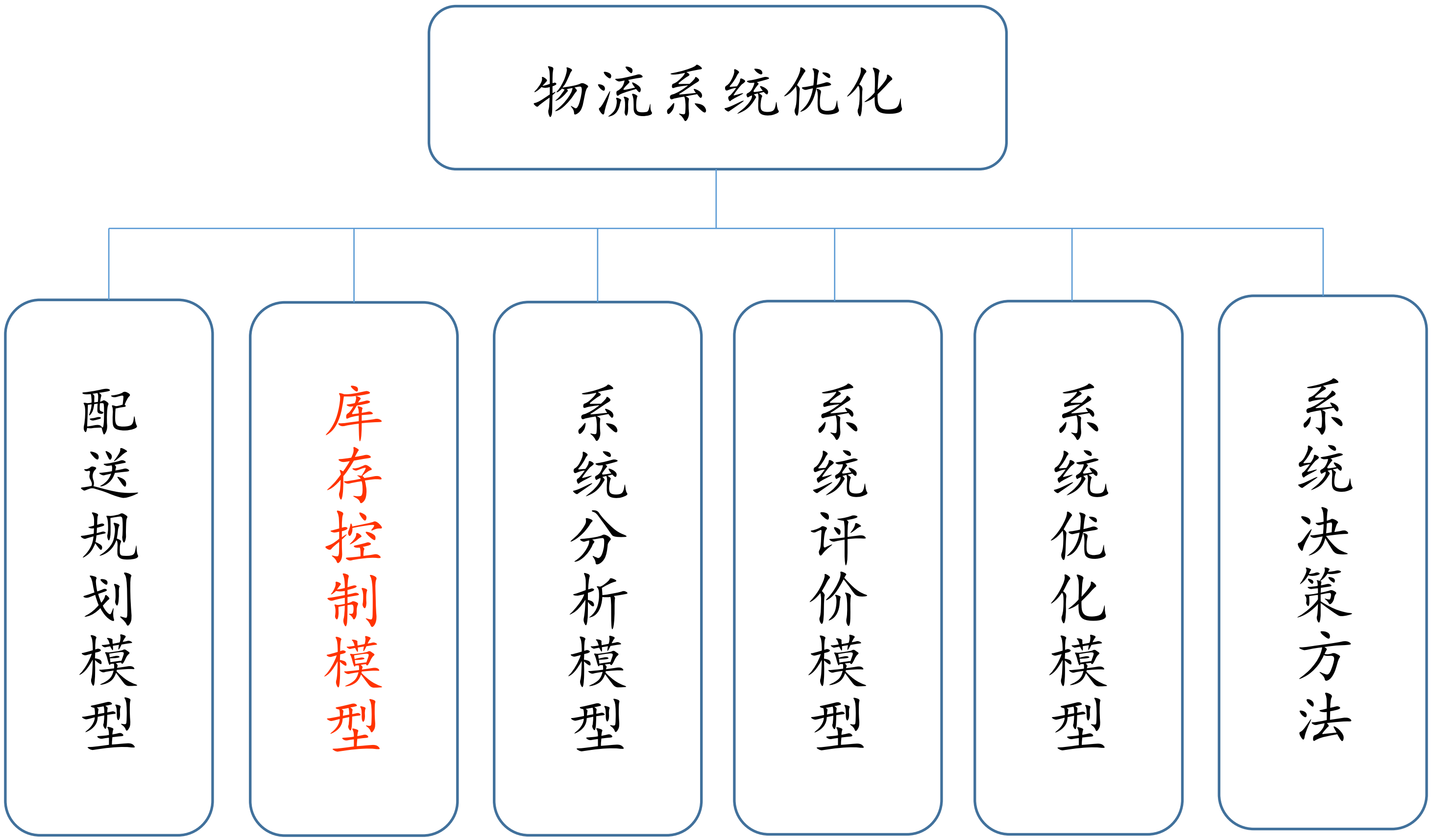
经济订货批量模型
EOQ


物流系统优化
配送规划模型
库存控制模型
系统分析模型
系统评价模型
系统优化模型
系统决策方法

本节内容

一、基本概念

二、模型及求解

三、算例

四、总结

一、基本概念

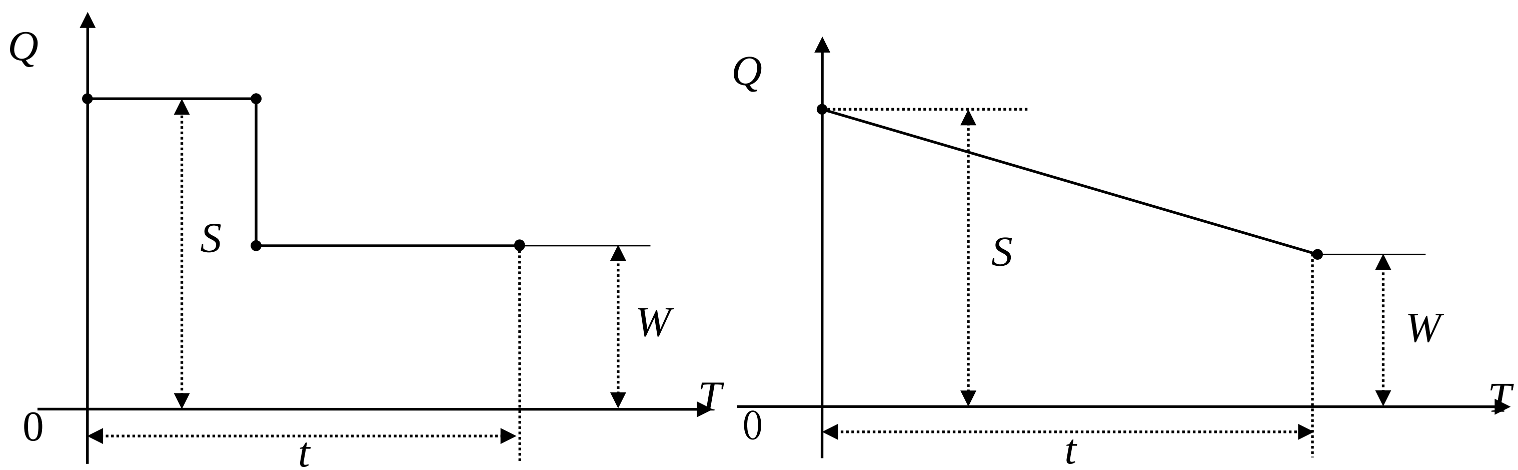
- 为了使生产和经营有条不紊地进行，更为了解决经常出现的需求与供应等方面的矛盾，人们常常把所需物资等暂时储存起来，以备将来使用。为了利用存储的手段缓解需求与供应等方面的不协调性，人们开始研究怎样控制储存量和存储时间，使损失最小而效益能达到最大，经过长期的探索和研究，逐渐形成了运筹学的一个重要分支即存储论。

一、基本概念

- 存储论又称库存理论（inventory theory），是运筹学理论体系中发展较早的一个分支，存储论主要考虑两个基本问题，即需要供应多少和什么时候开始供应。把供应的多少称为“量”的问题，把什么时候供应称为“期”的问题，所以存储论的基本方法就是将一个现实的存储问题转化为一种数学的模型，然后通过成本分析，解决“量”和“期”的问题，从而得出最佳的方案。

一、基本概念

1、**需求**：对一个存储系统而言，需求即是输出，就是从存储系统中取出一定数量的物资来满足消费的需要，需求的方式可以是间断成批的，也可以是连续均匀的。下图是两种输出状态，二者在时间t内输出量都为S-W，但左图为间断输出，右图为连续输出。



一、基本概念

1、**需求（续）：**单位时间内的需求称为**需求量**。有些需求量是确定的，比如汽车生产厂商按照订单合同每月卖给消费者多少辆汽车等；有些需求量是随机的，比如书店每月卖出的书的数量，对于诸如此类的需求，需要长期统计才能得出每月销售数量的规律。

一、基本概念

2、**补充**：存储系统由于需求而使存储量不断减少，因此必须加以补充才能满足需求的需要。补充就是存储系统的输入过程，指定周期内订货的数量或生产的数量称为定购量或生产量。补充主要是通过订货和生产来实现，而从订货到货物进入存储状态往往需要一段时间，因此为了在既定时间内能及时得到补充，必须提前订货，这段时间就称为提前时间。提前时间可能是确定的，也可能是随机的，当然提前时间可以很长，也可以很短。

3、**费用**：包含的比较多，其中影响最大的包括订货费、生产费、存储费、缺货费。

一、基本概念

（1）订货费：对外采购货物的费用主要包括两项：一是订货费用，如手续费、交通费、电信往来、人员外出采购的成本等等，订货费用是比较固定的费用，与订货的次数有关，但与订货的数量无关；二是货物成本费用，如货物本身的价格、运费等，货物成本费用是可变的费用，与订货的数量有关。

（2）生产费：补充存储时，不需要对外采购而由本厂自行生产所产生的费用，主要包括两项费用：一是基本固定的装配费用；二是可变的材料费、人工费等与生产产品数量有关的费用。

一、基本概念

（3）存储费：由于货物占用资金所产生的利息、使用仓库、保管货物、以及货物损坏变质造成的损失等费用的总和。这笔费用随着存储量的增加而增加，每件存储物单位时间内所分摊的费用通常用C_1表示。

（4）缺货费：由于存储不足所造成的损失，如供不应求失去销售机会、停工待料等造成的损失，每件短缺物品单位时间内损失的费用常用C_2表示。另外如果不允许缺货，那么缺货费认为是无穷大。

一、基本概念

4、**存储策略**：在存储系统中，往往需要把握每次的定购量和补充时机，所以存储论要解决的问题就是多少时间补充一次和每次补充的数量是多少，即指定所谓的最优存储策略。存储策略的优劣取决于该策略所耗费的费用，因此有必要对费用进行分析。

一、基本概念

4、**存储策略（续）：** 常见的存储策略

（1）t_0循环型策略：即每隔t_0时间就补充一个固定的存储量Q。

（2）(s,S)型策略：即经常检查库存量I，当库存量$I \geq s$时不补充；当$I<s$时就进行补充，补充的数量$Q=S-I$，其中s是指最低的库存量，也称订货点、安全存储量或警戒线等，S是指最大库存量。

（3）(t,s,S)型混合策略：即每经过时间t都要检查库存量I，若$I \geq s$时，不补充；若$I<s$时，使存储量达到S。

一、基本概念

5、**目标函数**：要在一些策略中选择一个最优的策略，就需要有一个衡量优劣的标准，这就是目标函数。在存储问题中，通常把目标函数取为平均费用函数或平均利润函数，选择的策略应该使平均费用达到最小，或者使平均利润达到最大。

一、基本概念

5、**目标函数（续）**：在确定最优的存储策略时，首先要把实际的问题抽象为数学模型。在形成模型的过程中，对一些复杂的条件要尽量加以简化，然后对模型用数学的方法加以研究，从而得出数量的结论，而这些结论是否正确，还要拿到实践中去加以校验，如结论与实际不符，就需要对模型重新分析、研究和修改。

存储模型大致可分为：（1）<u>确定型存储模型</u>，即模型中数据都是确定的数值；（2）随机型存储模型，即模型中数值不是确定的，而是含有随机变量。

二、模型及求解

1、模型假设

（1）缺货费用无穷大。

（2）当存储量降低为零时，可立即补充，即把提前时间近似地看作零。

（3）需求是连续和均匀的，设单位时间的需求量即需求速度R为常量，则t时间的需求量为Rt。

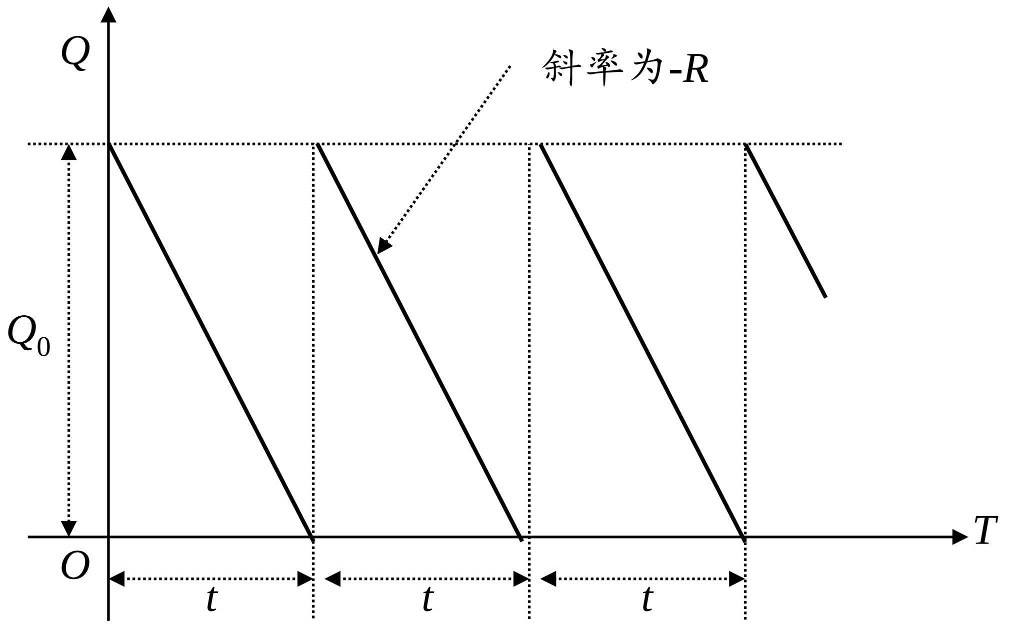
（4）每次订货量不变，订货费不变。

（5）单位存储费不变。

二、模型及求解

2、存储状态图

如图：



二、模型及求解

3、模型建立

由于此模型中货物瞬时立即补充，故不会缺货，即此模型不考虑缺货费，只用总平均费用来衡量存储策略的优劣，即此问题的目标函数可用总平均费用最小来建立。

每隔时间t补充一次存储，则订货量必须满足t时间的需求Rt，即订货量$Q=Rt$。设一次订货费为C_3，货物单价为K，则订货费为C_3+KRt，t时间的平均订货费即为$C_3/t+KR$，对应t时间内平均储存量为：

$$\frac{1}{t}\int_0^t RTdt = \frac{1}{2}Rt$$

二、模型及求解

3、模型建立（续）

设单位存储费用为C_1，t时间内的平均存储费用就为$1/2RtC_1$，那么t时间内总平均费用即为：

$$C(t)=\frac{C_3}{t}+KR+\frac{1}{2}RtC_1 \qquad (1)$$

问题是t取什么值时$C(t)$能达到最小，将公式（1）两端对时间t求导并令其等于0，即有：

$$\frac{dC(t)}{dt}=-\frac{C_3}{t^2}+\frac{1}{2}RC_1=0 \qquad (2)$$

二、模型及求解

4、模型求解

（解）以上方程得最佳订货周期：

$$t_0 = \sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}}$$

即每隔时间t_0就订货一次可使$C(t)$能达到最小，其最佳订货量为：

$$Q_0 = Rt_0 = R\sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}} = \sqrt{\frac{2C_3 R}{C_1}} \qquad (3)$$

二、模型及求解

4、模型求解（续）

公式（1）即为存储论中著名的经济订货批量公式，英文Economic Ordering Quantity，简称为EOQ公式，也称平方根公式，或经济批量（Economic lot size）公式。

在总平均费用公式（1）中，Q_0、t_0都与货物单价K无关。为了方便分析和计算，如无特殊需要，可以不再考虑此项费用，因此公式（1）可以改写成：

$$C(t)=\frac{C_3}{t}+\frac{1}{2}RtC_1 \tag{4}$$

二、数学模型

4、模型求解（续）

再将t_0代4入公式（4）中，可以得出最佳平均费用公式：

$$C_0 = C(t_0) = C_3\sqrt{\frac{C_1 R}{2C_3}} + \frac{1}{2}RC_1\sqrt{\frac{2C_3}{C_1 R}} = \sqrt{2C_1 C_3 R} \qquad (5)$$

三、算例

（例1）某单位对某产品的需求量是1000件/月，每批的订货费是10元，不允许缺货，货物到达后存入仓库，每月每件产品的存储费是0.5元，怎样组织进货最划算？

（解）由题意可得到R=1000件/月，C_3=10元/批，C_1=0.5元/月件，根据公式（2）（3）（5）计算如下：

最佳订货周期为：

$$t_0=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}=\sqrt{\frac{2\times 10}{0.5\times 1000}}=0.2\text{（月）}$$

三、算例

最佳订货量为：

$$Q_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}=\sqrt{\frac{2\times 10\times 1000}{0.5}}=200（件）$$

最佳平均费用为：

$$C_0=\sqrt{2C_1C_3R}=\sqrt{2\times 0.5\times 10\times 1000}=100（元）$$

由此可知，应该每隔0.2个月即6天进货一次，每次进货的数量为200件，这样就能使总平均费用达到最小，为每个月100元。

三、算例

（例2）在例1的基础上，对某产品的需求量提高四倍，即4000件/月，其它条件不变，那么最佳订货量是否也提高到四倍即800件。

（解）此时R=4000件/月，可以分别求得：

最佳订货周期为：

$$t_0=\sqrt{\frac{2C_3}{C_1R}}=\sqrt{\frac{2\times 10}{0.5\times 4000}}=0.1\text{（月）}$$

三、算例

最佳订货量为：

$$Q_0=\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}}=\sqrt{\frac{2\times10\times4000}{0.5}}=400(\text{件})$$

最佳平均费用为：

$$C_0=\sqrt{2C_1C_3R}=\sqrt{2\times0.5\times10\times4000}=200\text{（元）}$$

由此可知，应该每隔0.1个月即3天进货一次，每次进货的数量为400件，总平均最小费用为每个月200元，此种情况尽管对某产品的需求量提高了四倍，但<u>最佳订货量却不是提高到四倍</u>。

四、总结

- 经济订货批量模型EOQ
  - 基本概念
    - 存储论
    - 基本组成
      - 需求<->补充
      - 费用<->策略
    - 目标函数
  - 模型及求解
    - 模型假设
      - 无缺货费
      - 瞬时补充
      - 需求均匀
    - 模型状态图
    - 模型建立
    - 模型求解
      - 求偏导=0
  - 算例
    - 直接用结论计算
    - 最佳订货量变化规律

复习思考题：

（1）EOQ是否是线性规划模型？

（2）根据本节内容，结合随机型存储模型概念，可能会后哪些假设会不同？

（3）查阅相关资料，归纳总结现代物流的库存控制中还有哪些典型的方法？